Zestaw 3

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozstrzygnij, czy liczba $8^{77} + 13^{99}$ *jest podzielna przez 3.*

Rozwiążemy to zadanie kongruencjami.

$$8 \equiv 2 \quad (mod\ 3)$$
$$8^2 \equiv 1$$
$$8^{76} \equiv 1$$
$$8^{77} \equiv 2$$

$$13 \equiv 1 \quad (mod\ 3)$$
$$13^{99} \equiv 1$$

Po dodaniu kongruencji stronami okazuje się, że liczba $8^{77} + 13^{99}$ jest podzielna przez 3.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n*, dla których cyfrą jedności liczby* $4^n + 7^n$ *jest 5.*

Liczba $4^n + 7^n$ jest nieparzysta, więc żeby jej ostatnią cyfrą było 5 wystarczy, żeby była podzielna przez 5. Liczba 4 do potęgi nieparzystej przystaje do -1 modulo 5, a do potęgi parzystej przystaje do 1 modulo 5.

Zobaczmy jak to jest dla liczby 7:

$$7 \equiv 3 \quad (mod\ 5)$$
$$7^2 \equiv -1$$
$$7^3 \equiv -3$$
$$7^4 \equiv 1$$
$$7^5 \equiv 3$$

i tak dalej.

Widzimy więc, że liczba $4^n + 7^n$ jest podzielna przez 5 dla $n = 2$, a potem dla wszystkich n postaci $4k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

3. Udowodnij, że kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3.

Wszystkie liczby całkowite możemy podzielić na trzy grupy: podzielne przez 3 (liczby postaci $3k$, $k \in C$), dające resztę 1 z dzielenia przez 3 (3k+1) i dające resztę 2 z dzielenia przez 3 (3k+2). Rozważmy kwadraty liczb z każdej z tych grup.

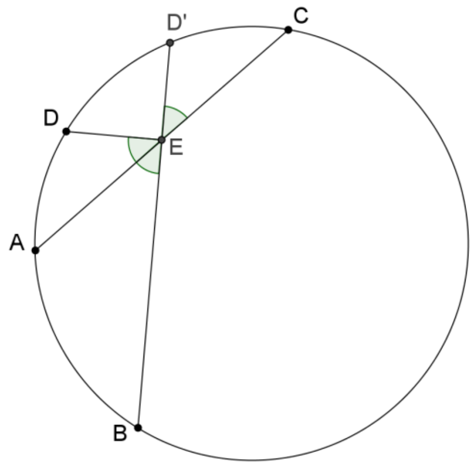
$$(3k)^2 = 9k^2 = 3\,(3k^2)$$
$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

W żadnym przypadku nie dostaliśmy reszty 2.

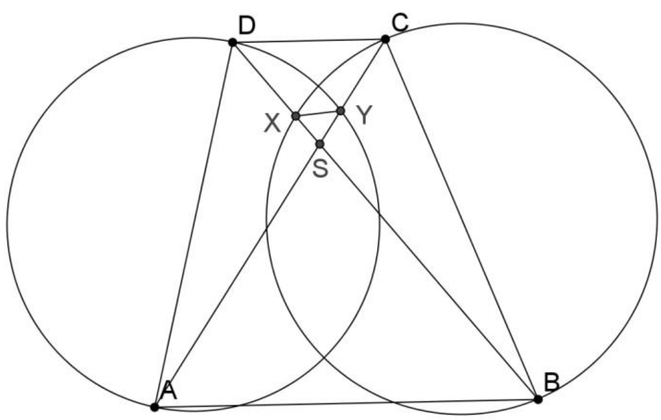
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest środkiem cięciwy AC oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. Wykaż, że $BE \cdot DE = AE^2$.



Niech D' będzie punktem wspólnym naszego okręgu i prostej BE, różnym od B. Łatwo zauważyć, że $\sphericalangle CED' = \sphericalangle AED$, więc odcinek ED' jest symetryczny do odcinka ED względem symetralnej cięciwy AC. Teraz równość $BE \cdot DE = AE^2$ wynika z twierdzenia o dwóch siecznych.

2. Dany jest trapez ABCD o podstawach AB i CD. Okręgi o średnicach BC i DA przecinają się w punktach P i Q. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S. Dowieść, że punkty P, Q i S leżą na jednej prostej.



Punkty P i Q należą do osi potęgowej naszych dwóch okręgów, więc jeśli pokażemy, że punkt S też należy do tej osi zadanie będzie zrobione. Potęga punktu S względem tych dwóch okręgów jest równa jeśli $AS \cdot SY = BS \cdot SX$ (zobacz rysunek), to zaś jest równoważne temu, że trójkąty ABS i YXS są podobne, czyli kąty AYX i ABS są równe; równe więc są również kąty XYS i XDC. Te zaś kąty są równe gdy na czworokącie XYCD da się opisać okrąg. Ostatecznie wystarczy wykazać, że na czworokącie XYCD da się opisać okrąg. Da się, ponieważ kąty $\sphericalangle DXC = \sphericalangle DYC = 90°$ (kąty do nich przyległe to kąty wpisane oparte na średnicy).

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba $2^n + 273$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Oznaczmy $2^n + 273 = m^2$. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $2^n + 273$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3, a więc nie może być kwadratem liczby naturalnej. Niech więc n będzie parzyste: $n = 2k$. Dostajemy wówczas:

$$273 = m^2 - 2^{2k} = (m - 2^k)(m + 2^k)$$

Dostaliśmy równanie diofantyczne, które prowadzi do czterech układów równań:

$$\begin{cases} m - 2^k = 1 \\ m + 2^k = 273 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 3 \\ m + 2^k = 91 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 7 \\ m + 2^k = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 13 \\ m + 2^k = 21 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione gdy $k = 2$ lub $k = 4$, czyli $n = 4$ lub $n = 8$.