



Zestaw 4

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Dwóch uczonych napisało na siedmiu kartkach liczby od 5 do 11. Przemieszawszy te karteczki pierwszy wziął trzy z nich a drugi dwie, a ostatnie dwie, nie patrząc, co jest na nich napisane, wyrzucili do kosza. Zajrzawszy do swoich kartek pierwszy uczoney powiedział do drugiego: „Wiem, że suma liczb na twoich kartkach jest liczbą parzystą”. Jakie liczby były napisane na kartkach pierwszego uczonego?

Były to liczby 6, 8, 10. Pierwszy uczoney ujrawszy, że ma wszystkie liczby parzyste z zestawu od 5 do 11, uznał, że drugi uczoney ma na pewno dwie nieparzyste.

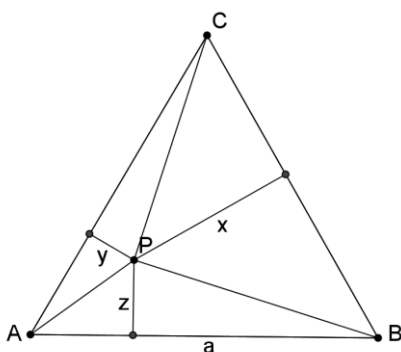
2. Czy można w komórkach tablicy 6×6 umieścić liczby naturalne w ten sposób, że w każdym prostokącie 4×1 suma liczb jest liczbą parzystą, a suma wszystkich liczb w tej tablicy jest liczbą nieparzystą?

Można. Oto przykład:

1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0

3. Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta równobocznego ABC . Odległości punktu P od boków BC , CA , AB są odpowiednio równe x , y , z . Wykaż, że dla danego trójkąta $x + y + z$ jest wielkością stałą.

Wykażemy, że dla danego trójkąta $x + y + z$ jest równe wysokości tego trójkąta.



Pole trójkąta ABC możemy policzyć dodając do siebie pola trójkątów ABP, BCP i ACP:

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$$

Po uproszczeniu:

$$h = x + y + z$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Czy można wypełnić tablice:

a) 4×4

b) 5×5

liczbami w ten sposób, by iloczyn w każdej kolumnie był liczbą dodatnią, a w każdym wierszu liczbą ujemną?

a) można, oto przykład:

1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	1	1	-1

b) nie można.

Założmy, że taki rozkład jest możliwy. Wówczas w każdym wierszu mamy nieparzystą ilość liczb nieparzystych, a więc w całej tablicy jest nieparzysta ilość liczb nieparzystych. Z drugiej strony w każdej kolumnie mamy parzystą ilość liczb nieparzystych, a więc w całej tablicy jest parzysta ilość liczb nieparzystych. Mamy sprzeczność.

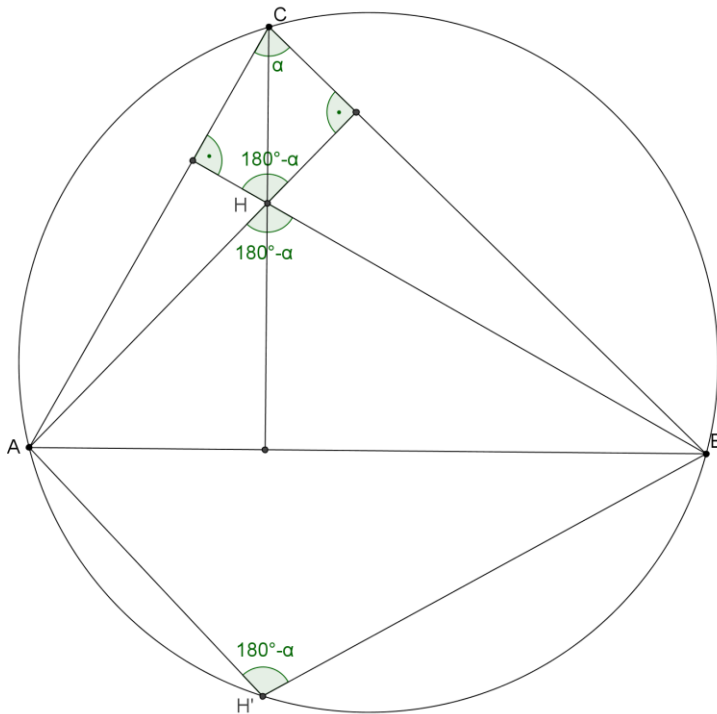
2. Wokół fontanny na dziedzińcu pałacu cesarza ustawiono dziesięć posągów różnej wagi. Cesarz, wielki miłośnik sztuki i matematyki rozkazał, by pomiędzy każdymi dwoma posągami umieścić kulę, której waga równa jest różnicy wag tych posągów. Nadworny matematyk zauważył, że w takim przypadku kule można podzielić na dwie grupy o równych ciężarach. Czy matematyk miał rację?

Miał rację. Oznaczmy masy posągów przez $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.

$$(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - e) + (e - f) + (f - g) + (g - h) + (h - i) + (i - j) + (j - a) = 0$$

W powyższej równości część liczb w nawiasach jest dodatnia a część ujemna (w nawiasach mamy masy kul lub liczby przeciwne do mas kul). Wystarczy przenieść ujemne na prawą stronę i mamy tezę matematyka.

3. Udowodnij, że obraz ortocentrum trójkąta w symetrii względem prostej zawierającej bok trójkąta leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.



Nie punkt H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a H' jego obrazem w symetrii względem prostej AB. Wystarczy pokazać, że na czworokącie $AH'BC$ da się opisać okrąg, bo będzie to oczywiście ten sam okrąg, który jest opisany na trójkącie ABC. Dlaczego na czworokącie $AH'BC$ da się opisać okrąg widać na rysunku.