Zestaw 5

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Uzasadnij, że liczba 300-cyfrowa składająca się ze 100 zer, 100 jedynek i 100 dwójek nie może być kwadratem liczby naturalnej

Nasza liczba jest podzielna przez 3 bo suma cyfr jest podzielna przez 3, ale liczba podzielna przez 3 żeby być kwadratem liczby naturalnej musi być również podzielna przez 9, a ta nie jest.

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{2^2}{4}$ *jest kwadratem liczby naturalnej.*

$$\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{2^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest naturalna, bo licznik jest podzielny przez 2 jako iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych.

3. Uzasadnij, że

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

Dodajmy 1 do obydwu stron równości. Mamy wtedy:

$$2+2+2^2+2^3\ldots+2^n=2^2+2^2+2^3\ldots+2^n=2^3+2^3+\cdots+2^n=\cdots=2^n+2^n=2^{n+1}$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Liczby 1, 2, 3,…, 9 podzielono na 3 grupy. Uzasadnij, że iloczyn liczb w co najmniej jednej grupie jest większy od 71

Iloczyn $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 9$ jest większy niż 71^3. Gdyby iloczyny liczb we wszystkich trzech grupach były mniejsze lub równe od 71 to iloczyn $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 9$ byłby mniejszy lub równy od 71^3.

2. Uzasadnij, że

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla 1 zachodzi. Załóżmy, że prawdziwa jest równość

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2$$

Pokażemy, że zachodzi

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

Dodajemy do obydwu stron założenia indukcyjnego $(k+1)(3k+4)$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) =$$
$$(k+1)(k(k+1) + (3k+4) = (k+1)(k^2 + 4k + 4) = (k+1)(k+2)^2$$

3. Uzasadnij, że $2^{10} + 5^{12}$ *jest liczbą złożoną.*

$$2^{10} + 5^{12} = 2^{10} + 5^{12} + 10^6 - 10^6 = 2^{10} + 5^{12} + 2 \cdot 2^5 5^6 - 10^6 = (2^5 + 5^6)^2 - 10^6$$
$$= (2^5 + 5^6 - 10^3)(2^5 + 5^6 + 10^3)$$

Łatwo zauważyć, że $(2^5 + 5^6 - 10^3) > 1$.