

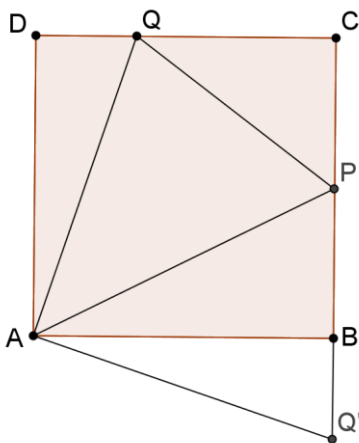


Zestaw 6

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W kwadracie $ABCD$ obrano na bokach BC i CD odpowiednio punkty P i Q takie, że kąt PAQ ma miarę 45° . Wykaż, że suma długości odcinków BP i QD jest równa długości odcinka PQ .

Obróćmy trójkąt ADQ o 90° w prawo.



Pokażemy, że trójkąty APQ i APQ' są przystające. Bok AP jest wspólny, $|AQ|=|AQ'|$, kąt PAQ' ma 45° , bo obracaliśmy o 90° , a kąt PAQ miał z założenia 45° . Mamy więc przystawanie z cechy bok-kąt-bok, czyli $|PQ|=|PQ'|$ i w konsekwencji dostajemy tezę.

2. Wykaż, że suma iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych i jednościami jest kwadratem liczby naturalnej.

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2\end{aligned}$$

3. Rozszyfruj poniższe działanie wiedząc, że każdej literze odpowiada inna cyfra i każdej cyfrze inna litera.

$$\begin{array}{r}SEND \\ +MORE \\ \hline MONEY\end{array}$$

$$9567+1085=10652$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W kwadracie ABCD obrano na bokach BC i CD odpowiednio punkty P i Q takie, że kąt PAQ ma miarę 45° . Wykaż, że obwód trójkąta PCQ jest równy połowie obwodu kwadratu.

Zobacz rozwiązanie zadania 1 dla klas pierwszych i drugich. Jest to to samo zadanie, tylko inaczej sformułowane.

2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a+b}{a-b}$, jeśli $2a^2 + 4ab = ab + 2b^2$.

$$2a^2 + 4ab = ab + 2b^2 \quad \text{więc}$$

$$2a^2 + 4ab - ab - 2b^2 = 0$$

$$2a(a + 2b) - b(a + 2b) = 0$$

$$(2a - b)(a + 2b) = 0$$

czyli $b = 2a$ lub $a = -2b$

W pierwszym przypadku dostajemy

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{3a}{-a} = -3$$

W drugim przypadku

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{-b}{-3b} = \frac{1}{3}$$

3. Udowodnij, że jeśli w poniższym dodawaniu każdej literze odpowiada inna cyfra i każdej cyfrze inna litera, to jest ono zawsze fałszywe.

$$\begin{array}{r} \text{T H R E E} \\ + \text{F I V E} \\ \hline \text{E I G H T} \end{array}$$

Widać, że $E = T + 1$ oraz $E + E = T + 10$, stąd wnioskujemy, że $E = 9$ i $T = 8$. Wówczas jednak $1 + E + V = 10 + H$, czyli $V = H$, co jest sprzeczne z warunkami zadania.