Zestaw 7

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeżeli pewną liczbę można przedstawić jaką różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych to również jej trzykrotność można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.

$$x = a^2 - b^2$$
$$3x = 3a^2 - 3b^2$$
$$3x = 4a^2 - a^2 - 4b^2 + b^2 + 4ab - 4ab =$$
$$= (4a^2 + 4ab + b^2) - (4b^2 + 4ab + a^2) = (2a + b)^2 - (2b + a)^2$$

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość.

$$a^3 + 3b^6 = c^2$$

Wystarczy wziąć b – dowolna liczba całkowita dodatnia, $a = b^2$, $c = 2b^3$

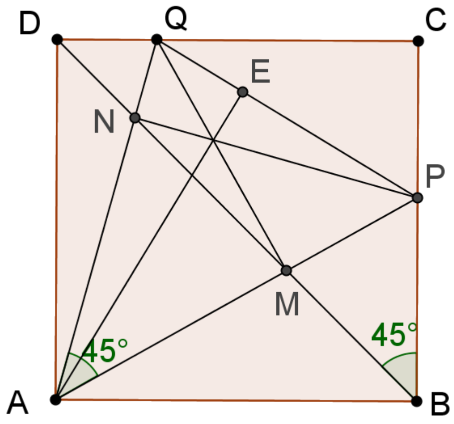
3. Wiadomo, że $a > b > 0$ oraz $a^2 + b^2 = 6ab$. Oblicz, ile wynosi $\frac{a+b}{a-b}$.

Jeżeli $a^2 + b^2 = 6ab$ to $a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$, czyli $(a + b)^2 = 8ab$.
Analogicznie $a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$, czyli $(a - b)^2 = 4ab$.

Oznacza to że $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{8ab}{4ab} = 2$ czyli $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$. (wynik $-\sqrt{2}$ odrzucamy, bo $a > b > 0$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45°$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek $P\ Q$, a odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że proste PN, QM i AE przecinają się w jednym punkcie.



Ponieważ kąty NAP i NBP mają jednakowe miary, więc na czworokącie ABPN można opisać okrąg, a to z kolei oznacza, że kąty ABP i ANP dają w sumie 180°, więc kąt ANP jest prosty czyli PN jest wysokością trójkąta APQ. Podobnie pokażemy, że QM jest wysokością trójkąta APQ, a w trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie.

2. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykaż, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

Pomnóżmy obie strony równości (1) przez mianownik prawej strony. Dostaniemy

$$wy + w\sqrt{x} = x + \sqrt{y}$$

czyli:

(2) $$w\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - wy$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu mamy:

$$w^2x - 2w\sqrt{x}\sqrt{y} + y = x^2 - 2wxy + w^2x^2$$

Oznacza to, że liczba $\sqrt{xy}$ jest wymierna. Oznaczmy ją przez a.

Pomnóżmy teraz obie strony równości (2) przez $\sqrt{x}$. Dostaniemy

$$wx - \sqrt{xy} = (x - wy)\sqrt{x} \quad \text{czyli} \quad wx - a = (x - wy)\sqrt{x}$$

Aby wykazać, że $\sqrt{x}$ jest liczbą wymierną, wystarczy udowodnić, że $x - wy$ jest liczbą różną od 0. Załóżmy, że tak nie jest, czyli $x = wy$. Jeżeli pomnożymy obie strony tej równości przez $y + \sqrt{x}$, to dostaniemy

$$xy + x\sqrt{x} = xy + y\sqrt{y} \quad \text{czyli} \quad x\sqrt{x} = y\sqrt{y}$$

a to jest niemożliwe, bo liczby x i y są różne.

Podobnie pokażemy, że $\sqrt{y}$ jest liczbą wymierną.

3. Liczby p, q, r są takimi liczbami wymiernymi, że $pq + qr + rp = 1$. Wykaż, że $\sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)}$ jest liczbą wymierną.

$$1 + p^2 = pq + qr + rp + p^2 = p(p + q) + r(p + q) = (p + r)(p + q)$$

Podobnie $1 + q^2 = (q + p)(q + r)$ i $1 + r^2 = (r + p)(r + q)$

Tak więc:

$$\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)} = \sqrt{(p+r)(p+q)(q+p)(q+r)(r+p)(r+q)} = (p+q)(p+r)(q+r)$$