Zestaw 7

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeżeli pewną liczbę można przedstawić jaką różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych to również jej trzykrotność można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych. .

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość.

$$a^3 + 3b^6 = c^2$$

3. Wiadomo, że $a > b > 0$ oraz $a^2 + b^2 = 6ab$. Oblicz, ile wynosi $\frac{a+b}{a-b}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\measuredangle PAQ = 45°$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek $P\,Q$, a odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że proste PN, QM i AE przecinają się w jednym punkcie.

2. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykaż, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

3. Liczby p, q, r są takimi liczbami wymiernymi, że $pq + qr + rp = 1$. Wykaż, że $\sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)}$ jest liczbą wymierną.

Rozwiązania należy oddać do piątku 25 października do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 25 października do północy.