Zestaw 8

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

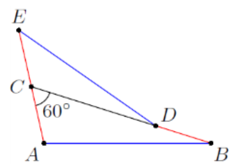
2. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 100 pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

3. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$ i $a + b = 2c$, to

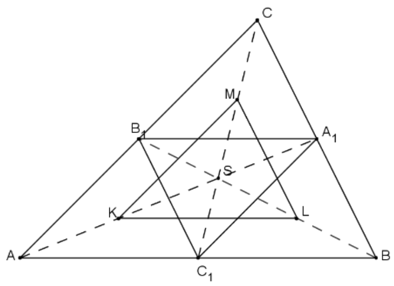
$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ACB = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.



2. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są odpowiednio środkami boków BC, AC, AB, zaś punkty K, L, M – środkami odcinków SA, SB, SC. Wykaż, że $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle KLM$.



3. Przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2 \cdot (-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

Rozwiązania należy oddać do czwartku 31 października do godziny 13.20 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 1 listopada do północy.