Zestaw 8

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

W liczbie $3n$ któraś z cyfr 1, 2, 9 wystąpi na początku. Jeśli liczba n ma na początku 3, to liczba $3n$ ma na początku 9 lub 1 (zależy, co jest na drugim miejscu). W pozostałych przypadkach pierwszą cyfrą liczby $3n$ będzie 1 lub 2.

2. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 100 pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Z warunków zadania wynika, że każda z liczb 4, 8, 12,…, 100 została pomalowana innym kolorem. Potrzeba więc co najmniej 25 kolorów. Pokażemy, że 25 kolorów wystarczy.
Podzielmy liczby 1, 2, 3, …, 100 na cztery grupy:
a) liczby postaci $4k$,
b) liczby postaci $4k+1$,
c) liczby postaci $4k+2$ i
d) liczby postaci $4k+3$, $k \in \mathbb{Z}$
Liczby z grupy a) kolorujemy każdą na inny kolor, liczby z grupy c) też każdą na inny kolor wykorzystując kolory, których użyliśmy w grupie a). Niech wśród wykorzystanych kolorów będzie czerwony i niebieski. Wszystkie liczby z grupy b) kolorujemy na czerwono, a wszystkie z grup[y d) na niebiesko. Łatwo udowodnić, że wówczas każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami.

3. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$ i $a+b=2c$, to

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$$

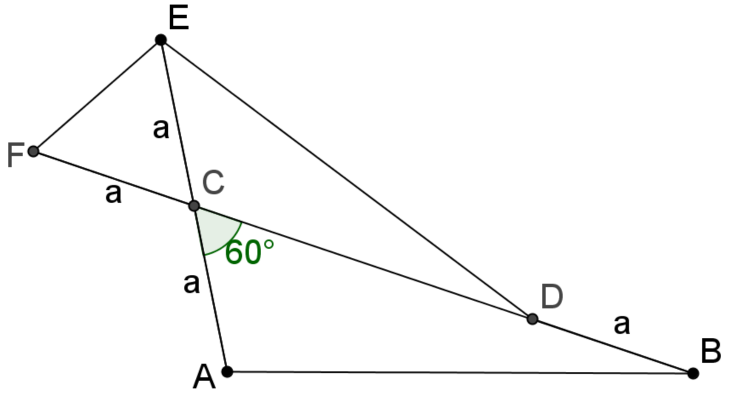
$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=\frac{ab-ac+ab-bc}{ab-ac-bc+c^2}=\frac{2ab-c(a+b)}{ab-c(a+b)+c^2}$$

w miejsce $a+b$ wstawiamy $2c$.

$$\frac{2ab-2c^2}{ab-2c^2+c^2}=\frac{2ab-2c^2}{ab-c^2}=2$$

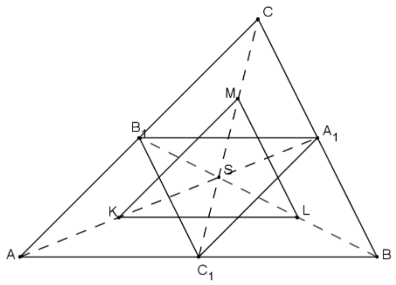
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ACB = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.



Zbudujmy na odcinku CE trójkąt równoboczny CEF, jak na rysunku. Pokażemy, że trójkąty ABC i FDE są przystające, a stąd wynika teza. $AC = EF = a$, $FD = CB = CD - a$, kąty ACB i BFE mają po 60°.

2. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są odpowiednio środkami boków BC, AC, AB, zaś punkty K, L, M – środkami odcinków SA, SB, SC. Wykaż, że $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle KLM$.



Pokażemy, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i KLM są przystające z cechy bok-bok-bok. Odcinek KL jako odcinek łączący środki ramion trójkąta ABS ma długość równą połowie długości odcinka AB. Podobnie odcinek A_1B_1 jako łączący środki ramion trójkąta ABC ma długość równą połowie długości odcinka AB. Są więc sobie równe. Podobnie udowodnimy równość pozostałych odcinków.

3. Przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2\cdot(-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

Rozważmy dwa przypadki:

a) $n = 2k$

$$\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2\cdot(-1)^n = \left[\frac{2k+4}{2}\right] + 6k - 2 = k + 2 + 6k - 2 = 7k$$

b) $n = 2k + 1$

$$\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2\cdot(-1)^n = \left[\frac{2k+5}{2}\right] + 6k + 3 + 2 = k + 2 + 6k + 3 + 2 = 7(k+1)$$