Zestaw 9

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$

Bez utraty ogólności możemy założyć, że $x \leq y \leq z$. Gdyby x było większe lub równe 2, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$ byłoby mniejsze lub równe od $\frac{3}{4}$ (każdy z trzech składników tej sumy byłby mniejszy lub równy od $\frac{1}{4}$). To oznacza, że $x=1$ i nasze równanie przybiera postać $\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{z}=1$. Mnożymy obie strony przez yz i przekształcamy:

$$\begin{aligned}&z+1+y=yz\\&yz-y-z+1=2\\&y(z-1)-(z-1)=2\\&(y-1)(z-1)=2\end{aligned}$$

Ponieważ liczby $y-1$ oraz $z-1$ są całkowite, więc $y-1=1$ i $z-1=2$ lub $y-1=2$ i $z-1=2$. Ostatecznie dostajemy jako rozwiązanie trójkę (1, 2, 3) i wszystkie jej permutacje (czyli trójki, które dostaniemy, gdy w trójce (1, 2, 3) zmienimy kolejność liczb).

2. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie

$$201n+6m=2016$$

Przekształćmy nasze równanie:

$$\begin{aligned}6m&=2016-201n\\2m&=672-67n\end{aligned}$$

Lewa strona jest dodatnia. Żeby prawa była dodatnia n musi być mniejsze od 11. Lewa strona jest parzysta. Żeby prawa była parzysta, n musi być parzyste. Nasze równanie ma więc 5 rozwiązań. Są to pary (n,m): (2, 269), (4, 202), (6, 135), (8, 68), (10, 1).

3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^2+y^2=2001$

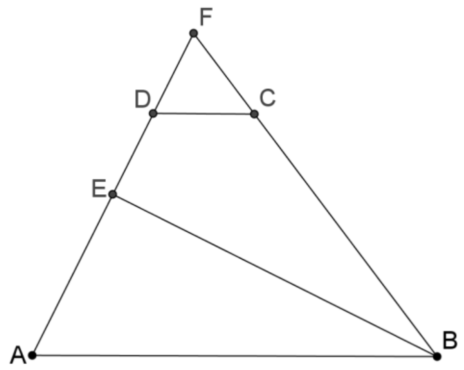
Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może z dzielenia przez 3 dawać tylko resztę 0 lub 1, więc jeżeli x^2+y^2 jest podzielne przez 3, to obie liczby x, y są podzielne przez 3. Podstawiamy więc $x=3a, y=3b$ i dostajemy

$$9a^2+9b^2=2001$$

Lewa strona jest podzielna przez 9, a prawa nie, więc nasze równanie nie ma rozwiązań.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trapez $ABCD$ o polu 15 i podstawach AB i CD. Dwusieczna kąta ABC jest prostopadła do ramienia AD i przecina je w takim punkcie E, że $\frac{AE}{ED} = 2$. Obliczyć pola figur ABE i $EBCD$, na które został podzielony trapez.

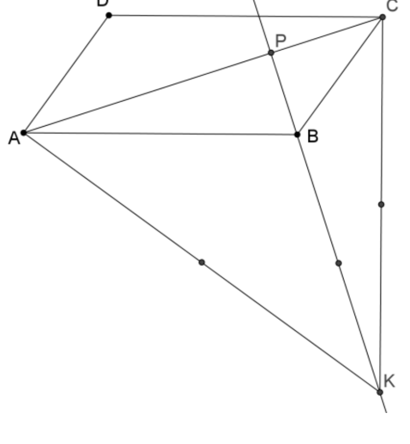


Oznaczmy przez F punkt przecięcia prostych AD i BC. W trójkącie ABF dwusieczna kąta przy wierzchołku B jest wysokością, więc trójkąt ABF jest równoramienny. Z tego wynika, że odcinki AE i EF są równej długości, czyli, że DF=ED. Przyjmijmy, że [XYZ] oznacza pole trójkąta XYZ. Trójkąt DCF jest więc podobny do trójkąta ABF w skali $\frac{1}{4}$, więc $[DCF] = \frac{1}{16}[ABF]$ i dalej $[ABE] = \frac{1}{2}[ABF]$ oraz $[EBCD] = \frac{7}{16}[ABF]$. Skoro $[ABE] + [EBCD] = \frac{15}{16}[ABF] = 15$, więc $[ABE] = 8$ a $[EBCD] = 7$.

2. Trapez ABCD o podstawach AB i CD jest równoramienny, Prosta l przechodzi przez środek okręgu opisanego na tym trapezie, jest równoległa do jego podstaw i leży między nimi, dwa razy bliżej boku AB niż boku CD. Punkt P jest rzutem punktu C na prostą l. Udowodnij, że AP jest prostopadłe do BC.

Prosta l przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i przez jego środek ciężkości (leży dwa razy bliżej boku AB niż boku CD), jest więc jego prostą Eulera. Wynika stąd, że P jest ortocentrum trójkąta ABC.

3. W równoległoboku ABCD kąt A jest ostry. Punkt K spełnia warunek $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCD = 90°$. Prosta KB przecina odcinek AC w punkcie P. Udowodnić, że punkt P oraz środki odcinków AK, BK, CK leżą na jednym okręgu.



Ponieważ $BC||AD$ i $AB||CE$ punkt B jest ortocentrum trójkąta ACK. Punkt P w takim razie jest spodkiem wysokości i wraz ze środkami odcinków AK, BK, CK leży na okręgu dziewięciu punktów dla trójkąt ACK.