Zestaw 10

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c, dla których $a^2 = b^2 + c$

$$a^2 - b^2 = c$$
$$(a-b)(a+b) = c$$

Przedstawiliśmy liczbę c w postaci iloczynu. Ponieważ jest to liczba pierwsza jeden z czynników równa się 1. Jest to mniejszy z czynników, a więc $(a-b)$. Jest tylko jedna para liczb pierwszych, których różnica wynosi 1: 3 i 2. Ostatecznie $a = 3, b = 2, c = 5$.

2. Wykaż, że liczba $3^{54} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24}$ jest złożona.

Oznaczmy $3^{27} = a$, $2^{12} = b$. Nasza liczba równa się wtedy $a^2 - ab + b^2$. Poprzekształcajmy:

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = (3^{27} + 2^{12})^2 - 3^{28}2^{12}$$
$$= (3^{27} + 2^{12} - 3^{14}2^6)(3^{27} + 2^{12} + 3^{14}2^6)$$

To, że liczba $3^{27} + 2^{12} - 3^{14}2^6$ jest większa od 1 wynika z faktu, że $3^{14}2^6$ jest mniejsze od 3^{27}.

3. Udowodnij, że jeśli liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

Jeśli $p = 3$, to $p^2 + 2 = 11$, a $p^3 + 2 = 29$ i wszystkie trzy liczby są pierwsze. Jeśli liczba p jest różna od 3, to to jej kwadrat daje resztę 1 z dzielenia przez 3 i wówczas liczba $p^2 + 2$ jest podzielna przez 3 i większa niż 3, a więc złożona.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ (x+3y)^2 = 1 \end{cases}$$

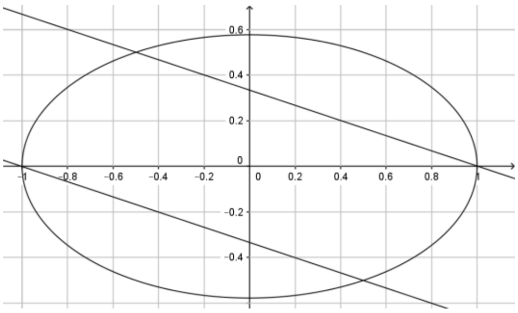
Układ ten jest równoważny alternatywie dwóch układów:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

Każdy z nich możemy rozwiązać metodą podstawiania i okaże się, że wyjściowy układ ma 4 rozwiązania:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

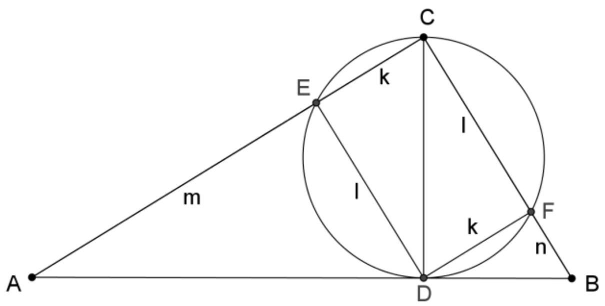
Poniżej rozwiązanie graficzne. Pierwsze równanie opisuje elipsę o półosiach $a = 1$ i $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a drugie figurę złożoną z dwóch prostych.



2. Podaj największy dzielnik liczby 10^{10}, który w zapisie dziesiętnym nie zawiera cyfry 0.

Liczba 10^{10} zawiera w rozkładzie na czynniki pierwsze wyłącznie liczby 2 i 5. Aby dzielnik liczby 10^{10} nie zawierał cyfry 0 w rozkładzie na czynniki pierwsze może mieć albo tylko piątki, albo tylko dwójki. Większy jest ten z piątkami: 5^{10}.

3. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD z wierzchołka kąta prostego. Okrąg, którego średnicą jest wysokość CD, odcina na przyprostokątnych trójkąta odcinki długości k i l. Oblicz pole trójkąta ABC.



Kąty DEC i DFC są proste, jako wpisane, oparte na średnicy. Obliczymy pole trójkąta ABC jako sumę pól trójkątów DBC i ADC.
Długość odcinka m policzymy z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego:

$l^2 = mk, \;\; m = \frac{l^2}{k}$

Podobnie:

$n = \frac{k^2}{l}$.

Teraz możemy liczyć pole.

$$P = \frac{1}{2}(m+k)l + \frac{1}{2}(n+l)k = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{k} + k\right)l + \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{l} + l\right)k$$

Po przekształceniach dostajemy ładne wyrażenie: $P = \frac{(k^2+l^2)^2}{2kl}$.