Zestaw 11

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba $\frac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ też jest wymierna.

Niech $\frac{a-b}{a+b} = w, w \in W$. Wyliczamy b: $b = \frac{a-aw}{w+1}$ (liczba w jest różna od -1, bo gdyby była równa -1, liczba a musiałaby się równać 0, a ma być dodatnia). Podstawiamy wyliczoną wartość w miejsce b w wyrażeniu $\frac{2a-b}{2a+b}$:

$$\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{2a - \frac{a-aw}{w+1}}{2a + \frac{a-aw}{w+1}} = \frac{\frac{2aw+2a-a+aw}{w+1}}{\frac{2aw+2a+a-aw}{w+1}} = \frac{3aw+a}{aw+3a} = \frac{3w+1}{w+3}$$

Liczba $\frac{3w+1}{w+3}$ jest oczywiście wymierna.

2. Dane są nieujemne liczby wymierne a i b. Udowodnij, że jeżeli suma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ jest wymierna, to każda z liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jest wymierna.

Niech $\sqrt{a} + \sqrt{b} = w$. Jeżeli $w = 0$, to $\sqrt{a} = 0$ i $\sqrt{b} = 0$ i teza zachodzi.
Załóżmy, że $w \neq 0$. Wówczas:

$$\sqrt{a} = w - \sqrt{b}$$
$$a = w^2 - 2w\sqrt{b} + b$$
$$\sqrt{b} = \frac{w^2 + b - a}{2w}$$

czyli $\sqrt{b}$ jest liczbą wymierną. $\sqrt{a}$ jest wymierny, bo $\sqrt{a} = w - \sqrt{b}$.

3. Udowodnij, że liczba $log_2 3$ jest niewymierna.

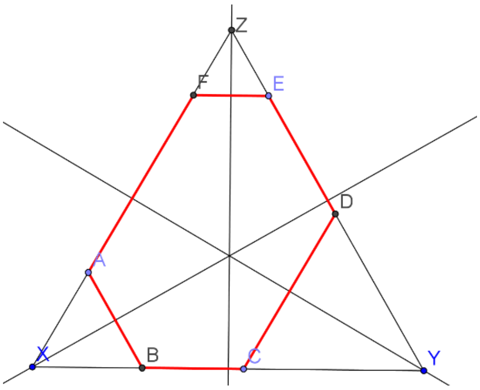
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna, czyli

$$\log_2 3 = \frac{k}{l} \qquad k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0$$
$$2^{\frac{k}{l}} = 3$$
$$2^k = 3^l$$

To zaś może zajść wyłącznie, gdy $k = 0$ i $l = 0$ i mamy sprzeczność z warunkiem $l \neq 0$.

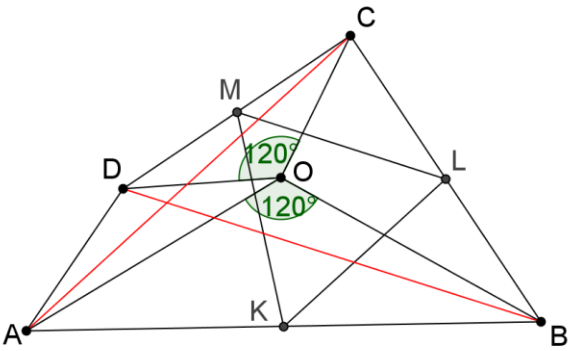
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Miara każdego kąta sześciokąta ABCDEF jest równa 120°. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.



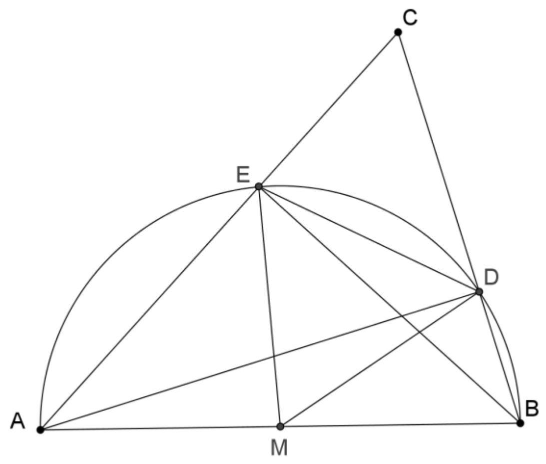
Sześciokąt, w którym każdy kąt ma miarę 120°, nazywamy sześciokątem równokątnym. Wiele zadań dotyczących sześciokątów równokątnych można rozwiązać uzupełniając je do trójkąta równobocznego, jak na rysunku powyżej. Narożne trójkąty ABX, CDY, FEZ są równoboczne, a więc w każdym z nich symetralna podstawy jest dwusieczną kąta przy wierzchołku. Wynika stąd, że symetralne odcinków AB, CD i EF są dwusiecznymi kątów trójkąta XYZ, a w trójkącie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

2. Dany jest czworokąt wypukły ABCD i punkt O wewnątrz niego, przy czym zachodzą równości: AO = BO, CO = DO i $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 120°$. Dowieść, że środki odcinków AB, BC i CD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Łatwo udowodnisz, że trójkąty OCA i ODB są przystające, więc AC = BD. KL jest linią środkową w trójkącie ABC więc jest równa $\frac{1}{2}AC$. ML jest linią środkową w trójkącie DBC, więc jest równe $\frac{1}{2}BD$. Właśnie udowodniliśmy, że KL = LM. Trójkąt ODB powstaje z trójkąta OCA przez obrót o 120°, więc odcinki AC i BD przecinają się pod kątem 60°. To oznacza, że odcinki KL i LM tworzą kąt 60°. Mamy więc faktycznie trójkąt równoboczny.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, ze trójkąt DEM jest równoboczny.



Na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt M (kąty AEB i ADB są obydwa proste). Odcinki ME i MD są promieniami, więc trójkąt DEM jest równoramienny. Suma kątów przy wierzchołkach A i B wynosi 120° więc korzystając z faktu, że trójkąty AME i BMD są równoramienne łatwo policzysz, że kąt EMD ma 60°.