Zestaw 12

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozwiąż układ równań

$$ab = 1 \quad bc = 2 \quad cd = 3 \quad de = 4 \quad ea = 5$$

Rozwiążemy ten układ metodą podstawiania.

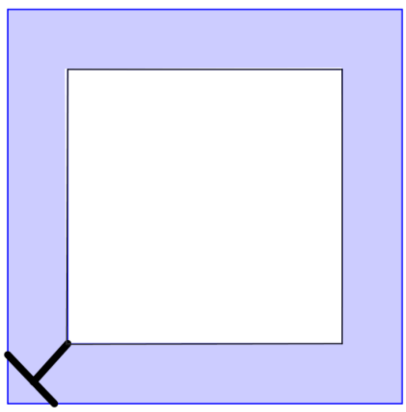
$b = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{a} \cdot c = 2$, $c = 2a$, $2ad = 3$, $d = \frac{3}{2a}$, $\frac{3}{2a} \cdot e = 4$, $e = \frac{8a}{3}$, $\frac{8a}{3} \cdot a = 5$, $a^2 = \frac{15}{8}$

$a = \frac{\sqrt{30}}{4}$, $b = \frac{4}{\sqrt{30}}$, $c = \frac{\sqrt{30}}{2}$, $d = \frac{6}{\sqrt{30}}$, $e = \frac{2\sqrt{30}}{3}$

lub $a = -\frac{\sqrt{30}}{4}$, $b = -\frac{4}{\sqrt{30}}$, $c = -\frac{\sqrt{30}}{2}$, $d = -\frac{6}{\sqrt{30}}$, $e = -\frac{2\sqrt{30}}{3}$

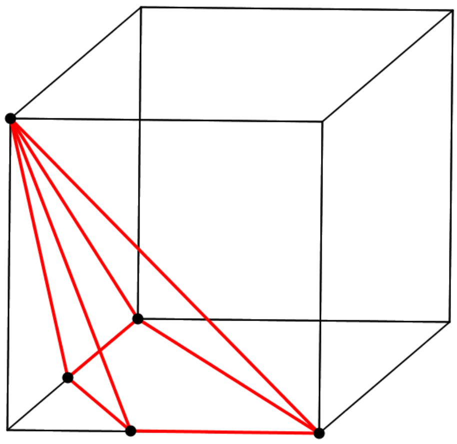
2. Turysta chce się dostać na wyspę w kształcie kwadratu o boku 100 m. Woda otoczona jest rowem z wodą o szerokości 5 m; wyspa wraz z rowem tworzą kwadrat o boku 110 m. Przy brzegu leżą dwie deski o długości 480 cm i szerokości 20 cm. Czy turysta może dostać się na wyspę?

Można. Deski trzeba ułożyć tak:



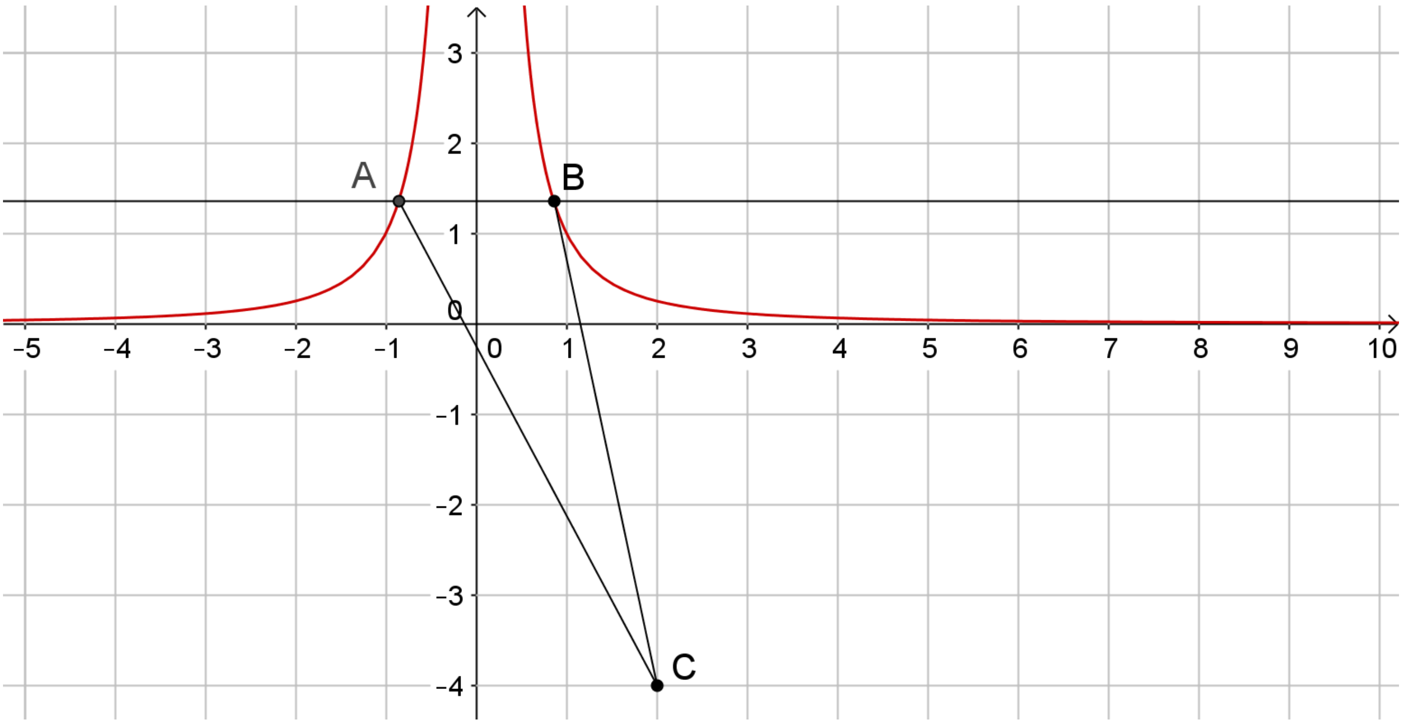
3. Czy istnieje ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt wypukły i którego dwie przeciwległe ściany boczne są prostopadłe zarówno do siebie, jak i do podstawy ostrosłupa?

Istnieje. Można go sobie wystrugać z sześcianu:



KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wykres funkcji $y = \frac{1}{x^2}$ przecinamy prostą równoległa do osi OX. Oznaczmy punkty przecięcia przez A i B, zaś przez C oznaczmy punkt (2, -4). Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest niemniejsze niż 4.



Niech punkt B ma współrzędne $(x, \frac{1}{x^2})$. Wówczas pole trójkąta ABC jest równe

$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 4\right) = \frac{1}{x} + 4x$

$$\frac{1}{x} + 4x \geq 4$$

$$\frac{1}{x} - 4 + 4x \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)^2 \geq 0$$

x jest dodatnie.

2. Wykaż, że jeżeli $x > 1$ i $y > 1$ to $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} > 1$.

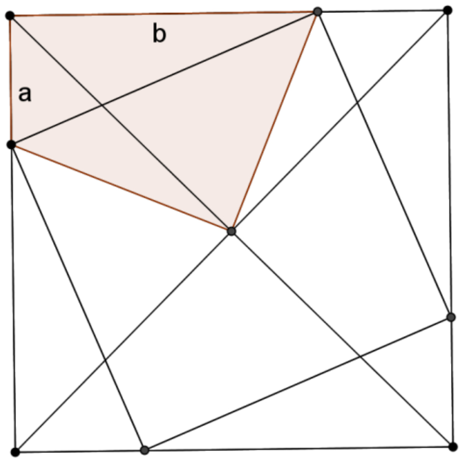
Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $x < y$. Wówczas

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} > \frac{x}{y+1} + \frac{y}{y+1} = \frac{x+y}{y+1}$$

a ponieważ $x > 1$, więc $\frac{x+y}{y+1} > \frac{1+y}{y+1} = 1$

3. Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste. Długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą odpowiednio a i b, długości boków przy drugim kącie prostym są równe (i nie wiadomo, ile wynoszą). Oblicz długość przekątnej łączącej wierzchołki przy kątach prostych.

Spojrzyj na rysunek poniżej (ponoć takim rysunkiem posłużył się Pitagoras, by dowodzić swoje twierdzenie):



Szukana przekątna ma długość równą połowie długości przekątnej dużego kwadratu, wynosi więc $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.