MISTRZOWIE MATEMATYKI

Zestaw 13

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Zapisano w wierszu kolejno 2017 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 8 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 70. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?

Skoro suma liczb od pierwszej do siódmej jest taka sama jak suma liczb o numerach od dwa do osiem, to oznacza, że liczba pierwsza i ósma są takie same i ogólnie co siódma liczba jest taka sama. Ostatnia z zapisanych liczb będzie więc równa 8, bo $2017 = 288 \cdot 7 + 1$.

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 24 = 9y + \dfrac{x+z}{2} \\ y^2 + 25 = 9z + \dfrac{x+y}{2} \\ z^2 + 26 = 9x + \dfrac{y+z}{2} \end{cases}$$

Dodajemy te trzy równania stronami i otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 75 = 10x + 10y + 10z$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 10z + 25 = 0$$
$$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 0$$

Równość może zachodzić wyłącznie gdy $x = y = z = 5$. Robimy sprawdzenie i okazuje się, że trójka $x = y = z = 5$ nie spełnia wyjściowego układu równań, a to oznacza, że nie ma on rozwiązań.

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

Drugie równanie mnożymy przez dwa, odejmujemy od pierwszego i zwijamy do wzoru skróconego mnożenia:

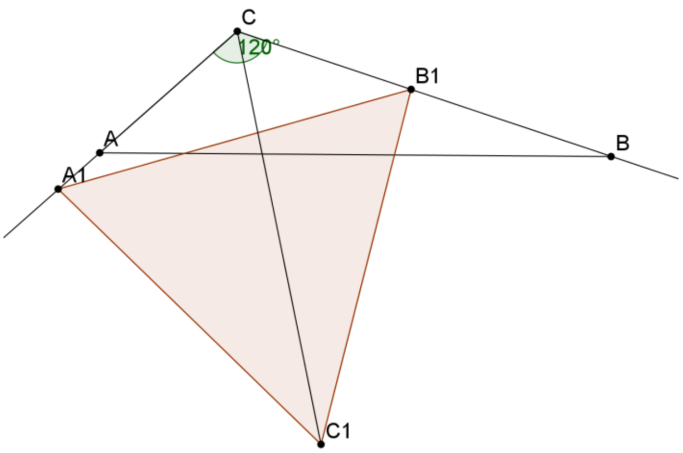
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ 2x + 4y + 6z = 28 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = -14$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$$

Suma trzech liczb nieujemnych wynosi zero, czyli są to trzy zera. Tak więc $x = 1$, $y = 2$ i $z = 3$. Robimy sprawdzenie i okazuje się, że nasze liczby spełniają wyjściowy układ równań.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę $120°$. Na półprostej CA wybrano punkty A_1; A_2 zaś na półprostej CB wybrano punkty B_1; B_2. Wewnątrz kąta ACB wybrano punkty C_1; C_2 w ten sposób, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2\,C_2$ są równoboczne. Wykaż, że punkty C; C_1; C_2 leżą na jednej prostej.



Na czworokącie $A_1C_1B_1C$ można opisać okrąg, bo kąty naprzeciwko siebie mają miary 120° i 60°. Kąty $A_1B_1C_1$ i A_1CC_1 są oparte na tym samym łuku i obydwa mają miarę 60°. To oznacza, że punkt C_1 leży na dwusiecznej kąta ACB. Podobnie pokażemy, że kąt C_2 leży na tej dwusiecznej.

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x^3 = 2y^3 + 4z^3$$

Prawa strona jest parzysta, więc lewa też, czyli $x = 2x_1$ i $x^3 = 8{x_1}^3$. Dostajemy więc

$$8{x_1}^3 = 2y^3 + 4z^3$$
$$4{x_1}^3 = y^3 + 2z^3$$

Teraz z kolei okazuje się, że y jest parzyste: $y = 2y_1$ i $y^3 = 8{y_1}^3$

$$4{x_1}^3 = 8{y_1}^3 + 2z^3$$
$$2{x_1}^3 = 4{y_1}^3 + z^3$$

To oznacza, że również z jest parzyste: $z = 2z_1$ i $z^3 = 8{z_1}^3$

$$2{x_1}^3 = 4{y_1}^3 + 8{z_1}^3$$
$${x_1}^3 = 2{y_1}^3 + 4{z_1}^3$$

Kontynuując tę procedurę dostaniemy nieskończone ciągi $x, x_1,\ x_2 \ldots, y, y_1,\ y_2 \ldots, z, z_1,\ z_2 \ldots$ liczb parzystych. Konsekwencją tego faktu jest, że x, y, z są podzielne przez dowolną potęgę dwójki, a tę własność ma tylko zero.

Jedynym rozwiązaniem jest trójka 0, 0, 0.

3. Wykaż, że trójkąt o kątach α, β, γ jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

Twierdzenie to ma postać równoważności, musimy więc wykazać wynikanie w dwie strony.

a) pokażemy, że jeżeli $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ to trójkąt jest ostrokątny

$\alpha < \beta + \gamma$
$2\alpha < \beta + \gamma + \alpha$
$2\alpha < 180°$ bo $\beta + \gamma + \alpha = 180°$
$\alpha < 90°$

$|\beta - \gamma| < \alpha$ więc $\beta - \gamma < \alpha$ i $\gamma - \beta < \alpha$ czyli $\beta < \alpha + \gamma$ i $\gamma < \alpha + \beta$ i podobnie jak dla kąta α pokażemy, że kąty β i γ są ostre.

b) pokażemy, że jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.

$\alpha < \beta + \gamma$
$\beta < \alpha + \gamma$ więc $\beta - \gamma < \alpha$

$\gamma < \alpha + \beta$ więc $\gamma - \beta < \alpha$

Co razem daje $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.