Zestaw 14

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W pewnym turnieju uczestniczyło 7 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 56. Wykaż, że istnieje takich pięć drużyn, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

Zauważmy, że jeżeli mecz zakończył się remisem, to suma punktów zdobytych przez obie drużyny w tym meczu wynosi 2, w przeciwnym wypadku, suma punktów wynosi 3. Ponieważ grało 7 drużyn, rozegrano 21 meczów. Oznaczmy przez r ilość meczów zakończonych remisem. Dostajemy:

$$2 \cdot r + 3 \cdot (21 - r) = 56$$
$$r = 7$$

Załóżmy, że co najwyżej 4 drużyny zaliczyły remis. Każda z nich mogła zremisować najwyżej 3 razy (tylko w meczach z pozostałymi remisującymi). Mogło więc być co najwyżej 6 meczów zakończonych remisem. Mamy sprzeczność.

2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ jest liczbą pierwszą.

Rozważmy przypadki ze względu na podzielność liczby n przez 5.

a) $n = 5k$
$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2}{5}\right] = 5k^2$ - jest to liczbą pierwszą wyłącznie dla $k = 1$
b) $n = 5k + 1$
$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2+10k+1}{5}\right] = 5k^2 + 2k = k(5k + 2)$ - też jest liczbą pierwszą dla $k = 1$
b) $n = 5k + 2$
$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2+20k+4}{5}\right] = 5k^2 + 4k = k(5k + 4)$ - nie ma takiego k (dla $k = 1$ dostajemy 9)
b) $n = 5k + 3$
$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2+30k+9}{5}\right] = 5k^2 + 6k + 1 = (5k + 1)(k + 1)$ - nigdy nie jest liczbą pierwszą
b) $n = 5k + 4$
$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2+40k+16}{5}\right] = 5k^2 + 8k + 3 = (5k + 3)(k + 1)$ - jest liczbą pierwszą dla $k = 0$

Ostatecznie dostajemy trzy rozwiązania: 4, 5 i 6.

3. Rozwiąż równanie: $[x] = \frac{2x\cdot\{x\}}{x+\{x\}}$

Oznaczmy $[x] = a,\ \{x\} = b$. Wówczas nasze równanie przybierze postać:

$$a = \frac{2(a+b)\cdot b}{a+b+b}$$
$$a = \frac{2ab + 2b^2}{a+2b}$$
$$a^2 + 2ab = 2ab + b^2$$
$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b \quad \text{lub} \quad a = -\sqrt{2}b$$

Liczba b jest nieujemna i mniejsza od 1, więc a jest liczbą całkowitą z przedziału $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, czyli może się równać -1, 0 lub 1. Musimy odrzucić 0, bo wówczas w wyjściowym równaniu mielibyśmy dzielenie przez 0. Pozostaje więc $a = -1$ lub $a = 1$ oraz $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Równanie ma więc dwa rozwiązania: $x_1 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wyznacz największą liczbę naturalną k taką, że liczba 2024! Jest wielokrotnością liczby 10^k.

Wystarczy policzyć, ile piątek jest w iloczynie $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2024$ (dwójek będzie więcej). Wśród liczb 1, 2, …, 2025 są 404 liczby podzielne przez 5, 80 liczb podzielnych przez 25, 16 liczb podzielnych przez 125 i 3 liczby podzielne przez 625. W sumie dostajemy 503 piątki, czyli k wynosi 503 (liczba 2024! ma 503 zera na końcu).

2. Udowodnij, że żaden element zbioru $S = \{6n+2; n \in N\}$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Liczby ze zbioru S dają resztę 2 z dzielenia przez 3, a tymczasem kwadraty liczb całkowitych nigdy nie dają reszty 2 dzielenia przez 3.

3. Udowodnij, że $(2n+2)$ −cyfrowa liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5$ jest, dla dowolnego n, kwadratem liczby naturalnej.

Podstawmy $\underbrace{11\ldots1}_{n} = x$. Naszą liczbę możemy zapisać tak: $x \cdot 10^{n+2} + 2x \cdot 100 + 25$.

Poprzekształcajmy:

$$x \cdot 10^{n+2} + 2x \cdot 100 + 25 = 100x \cdot 10^n + 200x + 25 =$$
$$100x\left(\underbrace{99\ldots9}_{n} + 1\right) + 200x + 25 = 100x(9x+1) + 200x + 25 =$$
$$900x^2 + 100x + 200x + 25 = 900x^2 + 300x + 25 = (30x+5)^2$$