Zestaw 15

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykaż, że dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(1 + \frac{1}{x^{10}}) \geq 10$$

Po usunięciu nawiasów i uporządkowaniu nasza nierówność przybierze postać:

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + x^8 + \frac{1}{x^8} + x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 10$$

Udowodnimy najpierw, że $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

Podobnie udowodnimy, że $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$, $x^6 + \frac{1}{x^6} \geq 2$, $x^8 + \frac{1}{x^8} \geq 2$, $x^{10} + \frac{1}{x^{10}} \geq 2$

Dodając do siebie stronami te pięć nierówności dostajemy

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + x^8 + \frac{1}{x^8} + x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 10$$

Uwaga! Choć prawdą jest, że dla każdego $x \neq 0$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

nie jest prawdą, że dla każdego $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Ta nierówność nie zachodzi oczywiście dla liczb ujemnych.

2. Udowodnij, że jeżeli $a^2 + b^2 = 2$ to $a + b \leq 2$

Do dowodu użyjmy nierówności między średnią kwadratową a średnią arytmetyczną:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

Jeśli w tej nierówności wstawimy 2 w miejsce $a^2 + b^2$, to szybko dostajemy tezę.

3. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab$$

Jeśli liczba dodatnia x jest mniejsza od 1, to $\sqrt{x} > x$. Mamy więc:

$$a\sqrt{b} > ab$$
$$b\sqrt{a} > ab$$
$$1 > ab$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy tezę.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby p przez 30 nie jest liczbą złożoną.

Niech $p = 30k + r$. Możliwe złożone reszty z dzielenia przez 30 to 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28. Gdyby reszta była parzysta, to p byłoby liczbą parzystą większą od 2, a więc nie mogłoby być liczbą pierwszą. Gdyby reszta wynosiła 9, 15, 21 lub 27, to p byłoby liczbą podzielną przez 3, większą od 3, więc znowu nie pierwszą. Gdyby reszta wynosiła 25, to p byłaby podzielna przez 5.

2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru m równanie

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity.

Liczba 1 jest pierwiastkiem tego równania niezależnie od wartości parametru m.

3. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{(a^3 + b^3)(a^{-1} - b^{-1})}{(a^{-1} + b^{-1})[(a-b)^2 + ab]}$$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez ab. Dostaniemy wówczas

$$\frac{(a^3 + b^3)(b-a)}{(a+b)[a^2 - ab + b^2]} = \frac{(a^3 + b^3)(b-a)}{(a^3 + b^3)} = b - a$$