



## Zestaw 15

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykaż, że dla każdego  $x \neq 0$  zachodzi nierówność

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)\left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10$$

2. Udowodnij, że jeżeli  $a^2 + b^2 = 2$  to  $a + b \leq 2$

3. Wykaż, że jeśli liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab$$

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby  $p$  przez 30 nie jest liczbą złożoną.

2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru  $m$  równanie

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity.

3. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{(a^3 + b^3)(a^{-1} - b^{-1})}{(a^{-1} + b^{-1})[(a - b)^2 + ab]}$$