## Zestaw 16

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

*1. Oblicz* $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

dla $x = 999\frac{1}{999}$, $y = 1000\frac{1}{1000}$, $z = 999000\frac{1}{999000}$

Jest to trudne zadanie arytmetyczne, które można przerobić na łatwe zadanie algebraiczne.

Oznaczmy $a = 999$, $b = 1000$

Wówczas $x = a + \frac{1}{a}$, $y = b + \frac{1}{b}$, $z = ab + \frac{1}{ab}$, a nasze wyrażenie przybiera postać

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(ab + \frac{1}{ab}\right)$$

Po nietrudnych przekształceniach stwierdzisz, że wartość tego wyrażenia wynosi 4 niezależnie od tego ile wynoszą $a$ i $b$.

*2. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej* $n$*:*

$$(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ lewa strona równa się 2 i prawa też 2.

Założenie indukcyjne:

$$(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Teza indukcyjna:

$$(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1)$$
$$= 2^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

Policzmy wartość wyrażenia $(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1)$.

Z założenia indukcyjnego:

$$(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)}$$

Mamy więc:

$$(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1)$$
$$= \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)} \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1)$$
$$= 2^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

*3. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.*

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $4 + 15 - 1 = 18$, jest podzielne przez 9

Zakładamy, że $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9 i badamy liczbę $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18$$

co jest podzielne przez 9, bo $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9 z założenia indukcyjnego, a $45n$ i $18$ w oczywisty sposób również są podzielne przez 9.

## KLASY TRZECIE I CZWARTE

*1. Znajdź liczbę c, dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3^{n+c} - 2^n}{\sqrt{5^n + 9^{n-2c}}}$$

*Jest równa 2.*

$$\frac{3^{n+c} - 2^n}{\sqrt{5^n + 9^{n-2c}}} = \frac{3^c \cdot 3^n - 2^n}{\sqrt{5^n + 3^{-4c} \cdot 3^{2n}}} = \frac{3^n\left(3^c - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 3^{-4c}}} = \frac{\left(3^c - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 3^{-4c}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^c - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 3^{-4c}}} = \frac{3^c}{3^{-2c}} = 3^{3c}$$

$$3^{3c} = 2$$

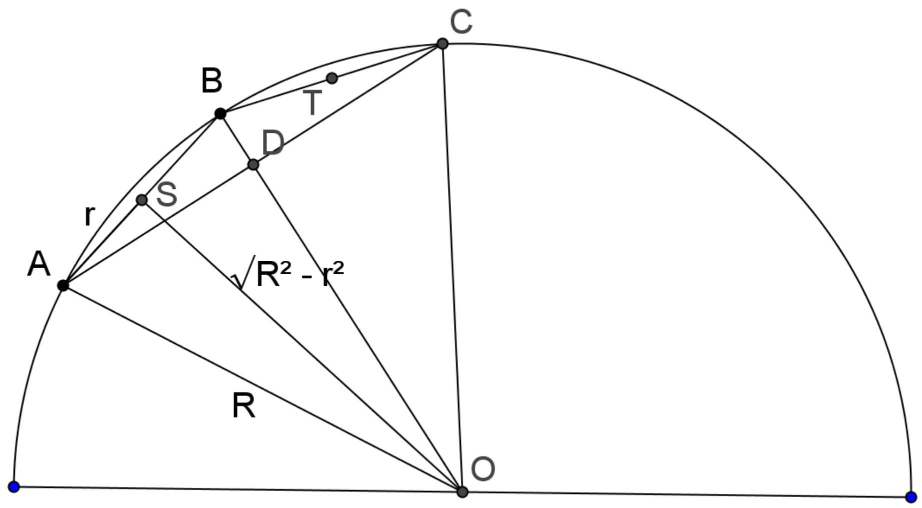
$$3c = \log_3 2$$

$$c = \frac{\log_3 2}{3}$$

2. Oblicz $\log_9 \cos\frac{11\pi}{6} - \log_9 \sin\frac{29\pi}{6}$

$$\log_9 \cos\frac{11\pi}{6} - \log_9 \sin\frac{29\pi}{6} = \log_9 \frac{\cos\frac{11\pi}{6}}{\sin\frac{29\pi}{6}} = \log_9 \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \log_9 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \log_9\sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

3. Dana jest półsfera o promieniu $R$ i leżące na niej dwa styczne do siebie okręgi o promieniu $r$. Wyznacz największą odległość między dwoma punktami należącymi do tych okręgów.




Weźmy przekrój półsfery zawierający jej środek oraz środki okręgów, o których mowa w zadaniu. Na rysunku punkt $B$ to punkt styczności, a punkty $A$ i $C$ to najbardziej oddalone punkty naszych okręgów. Czworokąt $ABCO$ to deltoid, którego dwa boki mają długość po $2r$, a dwa pozostałe i przekątna $OB$ mają długość $R$. Zadanie sprowadza się do policzenia długości przekątnej $AC$.

W deltoidzie przekątne przecinają się pod kątem prostym, więc wystarczy policzyć długość wysokości trójkąta $ABO$ poprowadzonej z wierzchołka $A$ i ją podwoić.

Wysokość $SO$ trójkąta $ABO$ ma długość $\sqrt{R^2 - r^2}$, a jego pole $r\sqrt{R^2 - r^2}$. Łatwo teraz policzyć wysokość $AD$. Ma ona długość $\frac{2r\sqrt{R^2-r^2}}{R}$. Odcinek AC ma więc długość $\frac{4r\sqrt{R^2-r^2}}{R}$.