Zestaw 17

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

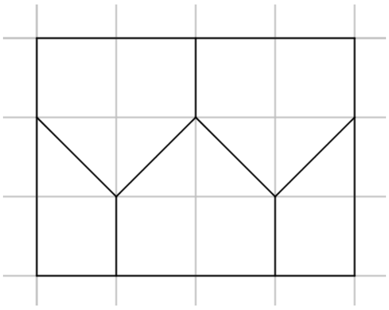
1. Wykazać, ze z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.

Oznaczmy elementy naszego zbioru $a_1, a_2, \dots, a_{100}$.
Rozważmy sumy:

$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_1 + a_2 \\ &a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots \\ &a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} \end{aligned}$$

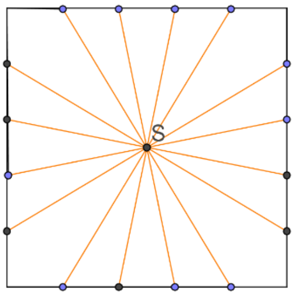
Jeżeli któraś z tych sum jest równa 100, to sprawa załatwiona. Jeżeli żadna nie jest równa 100, to istnieją dwie sumy dające taką samą resztę z dzielenia przez 100 (sum jest 100, a reszt różnych od 0 – 99). Wystarczy od większej sumy odjąć mniejszą i mamy tezę.

2. W prostokącie o bokach długości 3 i 4 obrano sześć różnych punktów. Udowodnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż $\sqrt{5}$



Podzielmy prostokąt jak na rysunku powyżej. Średnica (odległość dwóch najbardziej oddalonych punktów) każdej z tych części wynosi $\sqrt{5}$. Z zasady szufladkowej wynika, że przynajmniej w jednej części znajdą się dwa punkty. Ich odległość będzie więc nie większa niż $\sqrt{5}$.

3. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geq 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.



Na każdym boku trójkąta jest $n-1$ punktów, które mogą dzielić ten bok na odcinki o całkowitych długościach. Wszystkich takich punktów jest więc $4n-4$. Połączmy w pary punkty które są symetryczne względem środka kwadratu tworząc odcinki jak na rysunku powyżej. Takich par jest $2n-2$. Możemy więc wybrać co najwyżej $2n-2$ punktów w taki sposób, by dla każdego odcinka wybrany był tylko jeden koniec. Ponieważ wybieramy $2n$ punktów, więc istnieją dwa odcinki, dla których wybraliśmy oba końce. Są to przekątne szukanego równoległoboku.
Możemy w tym zadaniu skorzystać z zasady szufladkowej Dirichleta. Szufladami są pomarańczowe odcinki (jest ich $2n-2$), a kulami $2n$ wybranych punktów.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

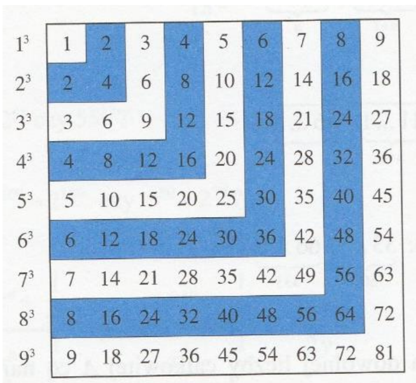
1. Jacek zrobił sobie filiżankę kawy. Wypił pół filiżanki i dolał mleka do pełna. Czynność tę powtórzył kilka razy, za każdym razem wypijając dwa razy mniej niż poprzednio. Na końcu wypił wszystko do dna. Czego wypił więcej: kawy czy mleka?

Kawy wypił całą filiżankę. Policzmy, ile wypił mleka. Niech x oznacza objętość filiżanki, załóżmy, że dolewał mleko n razy. Mleka wypił:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}x\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]x<x$$

Więcej wypił kawy.

2. W tablicy mnożenia wyróżniono tzw. gnomony (zob. rysunek). Udowodnij, że sumy liczb w gnomonach są sześcianami kolejnych liczb naturalnych.



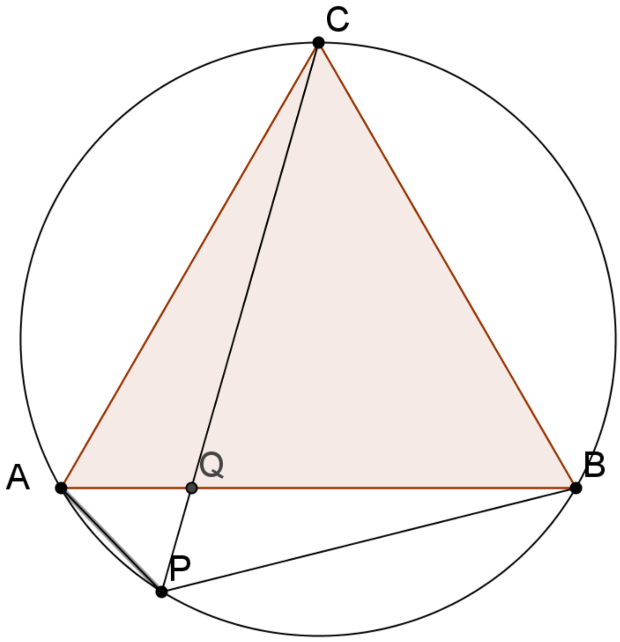
1^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^3	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3^3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4^3	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5^3	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6^3	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7^3	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8^3	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9^3	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Sumę zarówno w wierszu, jak i w kolumnie gnomonu można zapisać tak: $n(1+2+3+\cdots+n)$. Suma wszystkich liczb w gnomonie wynosi więc:
$2n(1+2+3+\cdots+n)-n^2$ (liczbę n^2 musimy odjąć, bo policzyliśmy ją dwa razy). Dostajemy:

$$2n(1+2+3+\cdots+n)-n^2=2n\frac{n(n+1)}{2}-n^2=n^3+n^2-n^2=n^3$$

3. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg i na łuku AB obrano taki punkt P, że odcinek PC przecina bok AB w punkcie Q. Udowodnij, że

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PQ}$$



Zapiszmy pole trójkąta PAB na dwa sposoby:

$$\frac{1}{2}\cdot PA\cdot PB\cdot\sin 120° = \frac{1}{2}\cdot PA\cdot PQ\cdot\sin 60° + \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PB\cdot\sin 60°$$

Po podzieleniu obustronnie przez $\sin 60° = \sin 120°$ i prostych przekształceniach dostajemy tezę.