



Zestaw 17

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykazać, że z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.
2. W prostokącie o bokach długości 3 i 4 obrano sześć różnych punktów. Udowodnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż $\sqrt{5}$
3. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geq 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Jacek zrobił sobie filiżankę kawy. Wypił pół filiżanki i dolał mleka do pełna. Czynność tę powtórzył kilka razy, za każdym razem wypijając dwa razy mniej niż poprzednio. Na końcu wypił wszystko do dna. Czego wypił więcej: kawy czy mleka?
2. W tablicy mnożenia wyróżniono tzw. gnomony (zob. rysunek). Udowodnij, że sumy liczb w gnomonach są sześcianami kolejnych liczb naturalnych.
3. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg i na łuku AB obrano taki punkt P, że odcinek PC przecina bok AB w punkcie Q. Udowodnij, że

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{1}{PQ}$$

1^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^3	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3^3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4^3	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5^3	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6^3	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7^3	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8^3	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9^3	9	18	27	36	45	54	63	72	81