Zestaw 18

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2025. Dwóch graczy gra w grę, w której na przemian wykonują następujące czynności: każdy w swoim ruchu zmazuje dwie wybrane liczby z tablicy i zastępuje je ich (nieujemną) różnicą. Gra kończy się, gdy na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Jeśli ona jest parzysta, wygrywa gracz pierwszy, a jeśli nieparzysta – drugi. Kto wygra grę?

2. Dane są trzy liczby rzeczywiste a, b, c. Wykaż, że

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$$

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + z) = 72 \\ (y + z)(x + y + z) = 120 \\ (z + x)(x + y + z) = 96 \end{cases}$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W trójkącie prostokątnym wysokość ma długość n i jej spodek dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których stosunek wynosi n. Oblicz n wiedząc, że pole trójkąta wynosi 20.

2. Udowodnij, że ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny dla każdej liczby naturalnej n.

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą następujące równości: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania należy oddać do piątku 7 lutego do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 7 lutego do północy.