Zestaw 18

GIMNAZJUM

1. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2025. Dwóch graczy gra w grę, w której na przemian wykonują następujące czynności: każdy w swoim ruchu zmazuje dwie wybrane liczby z tablicy i zastępuje je ich (nieujemną) różnicą. Gra kończy się, gdy na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Jeśli ona jest parzysta, wygrywa gracz pierwszy, a jeśli nieparzysta – drugi. Kto wygra grę?

Niezmiennikiem przekształcenia opisanego w zadaniu jest parzystość sumy liczb zapisanych na tablicy. Wynika to z tego, że różnica dwóch liczb ma tę samą parzystość, co ich suma, więc gdy zastąpimy dwie liczby ich różnicą, parzystość sumy wszystkich liczb się nie zmieni. Suma wszystkich liczb od 1 do 2025 jest nieparzysta (sprawdź!), więc wygra gracz drugi.

2. Dane są trzy liczby rzeczywiste a, b, c. Wykaż, że

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$$

Pomnóżmy obie strony przez 2:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 2abc(a + b + c)$$
$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$$
$$a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2 + b^2c^2 - 2abc^2 + c^2a^2 + c^2a^2 - 2a^2bc + a^2b^2 \geq 0$$
$$(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów liczb rzeczywistych jest nieujemna.

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + z) = 72 \\ (y + z)(x + y + z) = 120 \\ (z + x)(x + y + z) = 96 \end{cases}$$

Oznaczmy przez s sumę $x + y + z$. Nasz układ równań będzie miał postać:

$$\begin{cases} (s - z)s = 72 \\ (s - x)s = 120 \\ (s - y)s = 96 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami

$$(s-z)s+(s-x)s+(s-y)s=288$$
$$s(3s-x-y-z)=288$$
$$s\cdot 2s=288$$
$$s^2=144$$
$$s=12 \quad \text{lub} \quad s=-12$$

Załóżmy, że $s=12$

$$(12-z)\cdot 12=72$$
$$12-z=6$$
$$z=6$$

Podobnie policzymy, że $x=2$ oraz $y=4$

Analogicznie, jeśli $s=-12$, to $z=-6$, $x=-2$, $y=-4$.

LICEUM

1. W trójkącie prostokątnym wysokość ma długość n i dzieli jej spodek dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których stosunek wynosi n. Oblicz n wiedząc, że pole trójkąta wynosi 20.

Oznaczmy odcinki na jakie wysokość podzieliła przeciwprostokątną przez a i na. Mamy wówczas:

$$n^2=a\cdot na \text{ czyli } n=a^2$$

Bo wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na jakie podzieliła przeciwprostokątną.

Skorzystajmy z pola:

$$\frac{1}{2}(a+na)\cdot n=20$$

Podstawiamy $n=a^2$

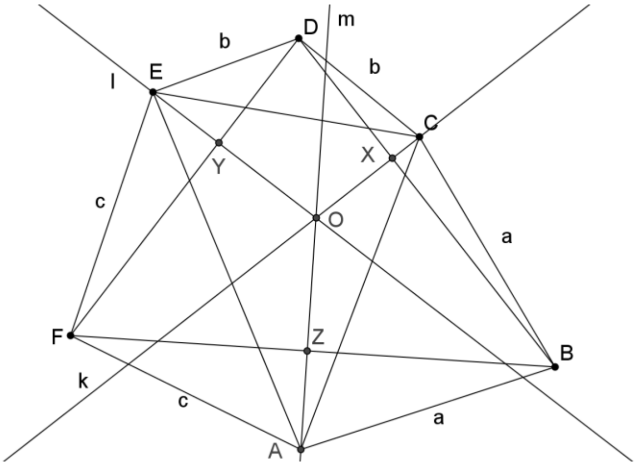
$$(a+a^3)\cdot a^2=40$$
$$a^5+a^3-40=0$$

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego rozwiązania jest liczba 2 (sprawdź), z czego wynika, że $n=4$.

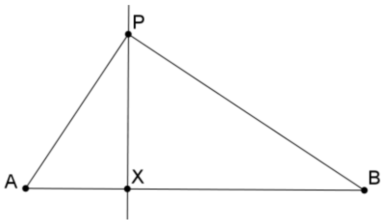
2. Udowodnij, że ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny dla każdej liczby naturalnej n.

Udowodnimy, że dla każdego n NWD $(21n+4, 14n+3)=1$.
Załóżmy, że d jest dzielnikiem $21n+4$, dzieli wówczas również $2(21n+4)$. Jeżeli d jest dzielnikiem $14n+3$, to dzieli też $3(14n+3)$. Jeżeli d dzieli $3(14n+3)$ i $2(21n+4)$, to dzieli też ich różnicę, czyli 1. Stąd wniosek, że NWD $(21n+4, 14n+3)=1$.

3. W sześciokącie wypukłym ABCDEF zachodzą następujące równości: AB=BC, CD=DE, EF=FA. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie.



W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat: jeżeli punkt X leży na prostej AB i prosta XP jest prostopadła do prostej AB, to $AP^2 - BP^2 = AX^2 - BX^2$



Lemat ten łatwo udowodnisz z twierdzenia Pitagorasa.

Wracamy do naszego zadania. Popatrzmy na prostą k i odcinek BD. Skoro $a^2 - b^2 = BX^2 - DX^2$ oraz $BO^2 - DO^2 = BX^2 - DX^2$, więc $BO^2 - DO^2 = a^2 - b^2$.

Podobnie uzasadnimy, że $DO^2 - FO^2 = b^2 - c^2$. Po dodaniu stronami dostajemy $BO^2 - FO^2 = a^2 - c^2$, a to oznacza, że punkt O należy do prostej m.