Zestaw 19

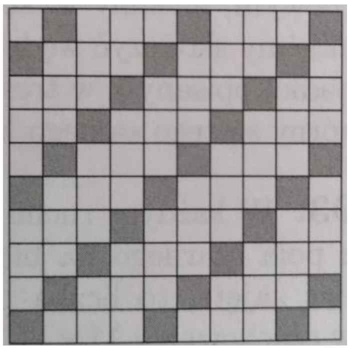
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna n, dla której $\sqrt[5]{5n}$, $\sqrt[6]{6n}$ i $\sqrt[7]{7n}$ są liczbami naturalnymi.

Istnieje. Taką liczbą jest na przykład $5^{84} \cdot 6^{35} \cdot 7^{90}$.

2. Rozstrzygnij, czy szachownicę 10×10 można pokryć 25-cioma kostkami o wymiarach 4×1.

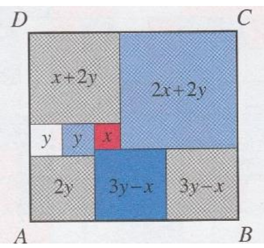
Nie można. Pokolorujmy szachownicę, jak na rysunku poniżej.



Każda kostka 4×1 przykrywa jedno pole czarne. Pól czarnych powinno więc być 25, a jest 26.

3. Prostokąt ABCD podzielono na kwadraty tak, jak na rysunku. Wiadomo, że AB=32 cm. Ile centymetrów długości ma bok AD?

Oznaczmy przez x bok najmniejszego kwadratu, a przez y tego ciut większego. Wtedy boki pozostałych kwadratów można oznaczyć tak:



Dostajemy, że $8y - 2x = 32$ i $4y + 3x = 32$. Obliczymy więc, że $x = 4$ a $y = 5$. Stąd $\mathrm{AD} = x + 5y = 29$ cm.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna n, dla której $\sqrt[6]{6n}$ i $\sqrt[8]{8n}$ są liczbami naturalnymi.

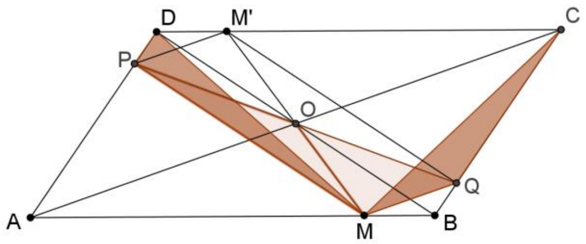
Taka liczba nie istnieje. Przeprowadzimy dowód nie wprost.

Załóżmy, że istnieje takie n, że $6n = p^6$ i $8n = q^8$, gdzie p i q są naturalne. Wówczas $\frac{3}{4} = \frac{6n}{8n} = \frac{p^6}{q^8} = \left(\frac{p^3}{q^4}\right)^2$. Pierwiastkujemy obie strony równości $\frac{3}{4} = \left(\frac{p^3}{q^4}\right)^2$ i dostajemy $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p^3}{q^4}$, a to by oznaczało, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną i mamy sprzeczność.

2. Liczby naturalne x i y spełniają warunek $NWW(x, y) = 8 \cdot NWD(x, y)$. Udowodnij, że $8x = y$ lub $8y = x$.

Niech $d = NWD(x, y)$. Wówczas istnieją takie liczby naturalne, względnie pierwsze a i b, że $x = ad$ i $y = bd$. Równość $NWW(x, y) = 8 \cdot NWD(x, y)$ możemy wówczas zapisać tak: $abd = 8d$, czyli $ab = 8$. Ponieważ a i b są względzie pierwsze, więc $a = 1$ i $b = 8$ lub na odwrót i jedna z tych liczb to d a druga $8d$.

3. Na boku AB równoległoboku ABCD obrano punkt M, a na bokach AD i CB takie punkty P i Q, że odcinki PM i QM są równoległe do przekątnych równoległoboku. Udowodnij, że trójkąty PDM i QCM mają równe pola.



Niech M’ będzie punktem symetrycznym do M względem punktu O (punkt przecięcia przekątnych równoległoboku). Ponieważ równoległobok jest figurą środkowosymetryczną, punkt M’ leży na boku CD. Z warunków zadania wynika, że czworokąt MQM’P jest równoległobokiem o środku symetrii w punkcie O. Zauważmy ponadto, że pole trójkąta QCM jest równe polu trójkąta QOM, a pole trójkąta PDM jest równe polu trójkąta POM. Pola te są równe, bo każde z nich stanowi $\frac{1}{4}$ pola równoległoboku MQM’P.