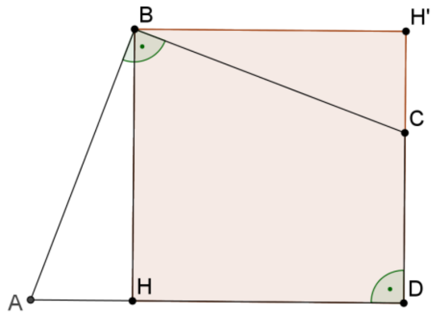
Zestaw 20

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

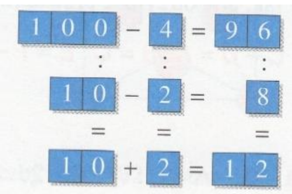
1. Czworokąt $ABCD$ ma kąty proste przy wierzchołkach B i D, kąt BHD jest również prosty. Ponadto $AB = BC$ i $BH = 1$. Oblicz pole tego czworokąta.



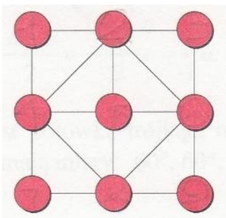
Trójkąt BCH' jest przystający do trójkąta AHB (powstał z niego przez obrót o 90°), więc nasz czworokąt ma pole równe polu kwadratu o boku 1.

2. W puste pola wpisz takie cyfry, aby spełnione były wszystkie równości. Żadna z liczb w rebusie nie może zaczynać się zerem.

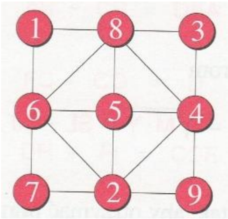
Jedno z możliwych rozwiązań:



3. Liczby od 1 do 9 wpisz w kółeczka figury

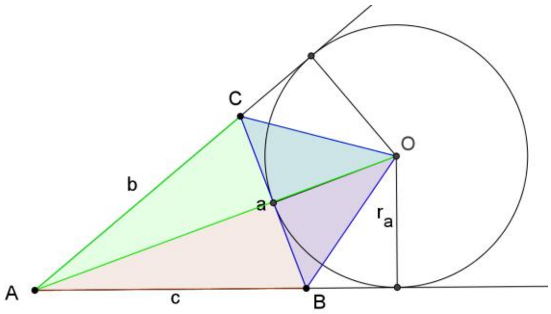


tak, aby sumy czterech liczb w kółeczkach – wierzchołkach wszystkich kwadratów, były równe.



KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że pole trójkąta można policzyć ze wzoru: $P = r_a(p-a)$*, gdzie* r_a *oznacza promień okręgu dopisanego do trójkąta, stycznego do boku długości* a*, a* p *oznacza połowę obwodu.*



Niech $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Zauważmy, że:

$$[ABC] = [ABO] + [AOC] - [BCO] = \frac{1}{2}c \cdot r_a + \frac{1}{2}b \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a = r_a \cdot \frac{1}{2}(b+c-a)$$
$$= r_a(p-a)$$

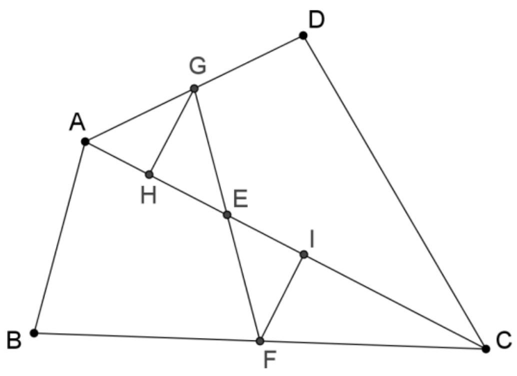
2. Udowodnij tożsamość $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$*, gdzie* r_a*,* r_b*,* r_c *oznaczają promienie okręgów dopisanych do trójkąta ABC, a* r *oznacza promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.*

Korzystając ze wzoru z zadania 1 możemy podstawić $r_i = \frac{P}{(p-i)}$, a w miejsce r wstawimy $\frac{P}{p}$

$$\frac{p-a}{P} + \frac{p-b}{P} + \frac{p-c}{P} = \frac{p}{P}$$

Po uproszczeniu i zauważeniu, że $a+b+c=2p$ dostajemy tożsamość.

3. Przekątna czworokąta wypukłego połowi odcinek łączący środki dwóch przeciwległych boków tego czworokąta. Udowodnij, że przekątna ta połowi także pole tego czworokąta.



Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku. Odcinki GH i FI są prostopadłe do przekątnej AC. Trójkąty EGH i EFI są przystające (równe pary kątów: FEI i HEG oraz IFE i HGE, równe boki FE i EG). To oznacza, że odcinki FI i HG są równej długości, a więc równej długości (dwa razy dłuższe) są również wysokości trójkątów BCA i ACD opuszczone na podstawę AC.