Zestaw 21

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Basen napełniany jest przez trzy krany. Gdy otwarte są pierwszy i drugi, napełnianie trwa 20 godzin, gdy pierwszy i trzeci – 15 godzin, a gdy drugi i trzeci – tylko 12 godzin. W jakim czasie napełni się basen, gdy otwarte będą wszystkie trzy krany?

Jeśli kran napełnia basen w ciągu n godzin, to w ciągu jednej godziny napełni $\frac{1}{n}$ basenu. Możemy więc napisać układ równań

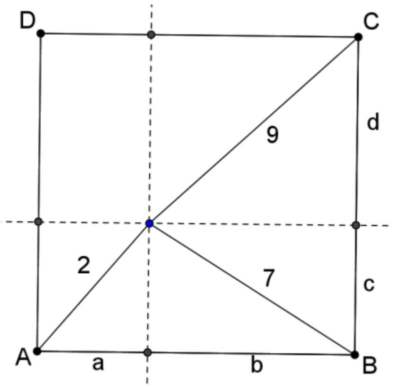
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Po dodaniu stronami i podzieleniu przez 2 dostajemy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$$

Czyli trzy krany napełnią basen w 10 godzin.

2. Punkt P leży wewnątrz kwadratu ABCD. Odległości tego punktu od wierzchołków A, B i C wynoszą odpowiednio 2, 7 i 9. Ile wynosi odległość punktu P od wierzchołka D?



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy

$$a^2+c^2=4$$
$$b^2+c^2=49$$

$$b^2 + d^2 = 81$$

Dodajemy do siebie równania pierwsze i trzecie i od tej sumy odejmujemy równanie drugie. Dostajemy

$$a^2 + d^2 = 36$$

Odległość punktu P od wierzchołka D wynosi więc 6.

3. Późnym wieczorem, nad rzeką przed kładką wąską i pełną dziur spotkała się czwórka podróżnych. Mieli tylko jedną latarkę. Przejście kładką bez latarki było nazbyt ryzykowne, innej drogi nie było. Jednocześnie na kładce mogły się znajdować nie więcej niż dwie osoby. Oznaczało to, że muszą przechodzić na raty – idą dwie osoby, potem jedna wraca z latarką. Tak się złożyło, że każdy z podróżnych mógł, idąc jak najszybciej, pokonać kładkę w innym czasie. Pierwszy w 10 minut, drugi w 5 minut, trzeci w 2 minuty, a czwarty w minutę. Oczywiście, jeśli idą dwie osoby, to poruszają się tempem tej wolniejszej. W jakim możliwie najkrótszym czasie mogli się wszyscy przeprawić na drugi brzeg?

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że najlepiej, żeby z latarką wędrował ten najszybszy i on przeprowadzał pozostałych. Wówczas potrzebujemy 19 minut. Da się jednak szybciej. Idą najpierw ten, który potrzebuje minutę i ten, który potrzebuje dwie minuty (idą 2 minuty). Ten, który idzie 2 minuty wraca i przechodzą ci, którzy idą 10 i 5 minut (kolejne 12 minut). Ten, który idzie minutę wraca po tego, który idzie 2 minuty (dodajemy 3 minuty). Razem wychodzi 17 minut.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Do 100 zaadresowanych kopert włożono losowo 100 listów, do każdej koperty po jednym liście (każdy list jest skierowany do innego adresata). Przez p_k oznaczamy prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych kopert. Oblicz wartość iloczynu

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{100}$$

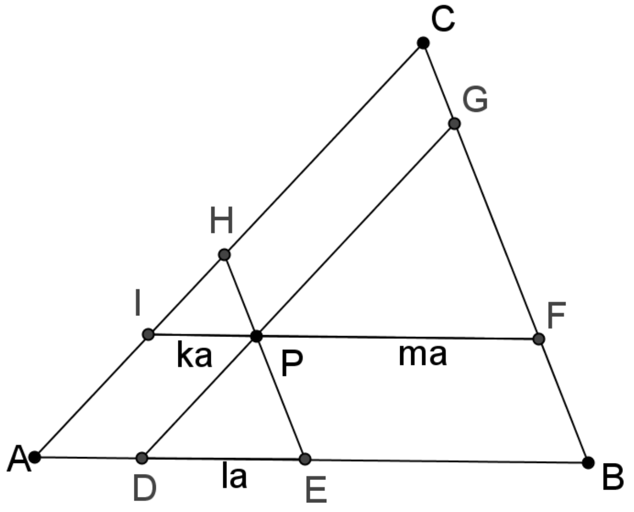
Zadanie jest podchwytliwe. Nie da się włożyć prawidłowo dokładnie 99 listów, bo jak włożymy dobrze 99, to setny też trafi do właściwej koperty, czyli p_{99}, a co za tym idzie, cały iloczyn jest równy 0.

2. Ile pierwiastków ma wielomian

$$W(x) = x(x-2)(x-4) \cdot \dots \cdot (x-2024) + (x-1)(x-3) \cdot \dots \cdot (x-2025)?$$

Zauważmy, że dla $x < 0$ $W(x)$ przyjmuje wartości ujemne (mamy sumę dwóch iloczynów, każdy po 1013 czynników ujemnych). W przedziale (1, 2) obydwa składniki są dodatnie. To oznacza, że między 0 a 2 jest miejsce zerowe. W przedziale (3, 4) wielomian przyjmuje wartości ujemne, co oznacza, że jest miejsce zerowe między 2 a 4. Postępując tak dalej policzymy, że nasz wielomian ma co najmniej 1013 miejsc zerowych. Jednocześnie nie może mieć więcej, bo jest stopnia 1013, czyli ma dokładnie 1013 miejsc zerowych.

3. Wewnątrz trójkąta wybrano punkt P. Przez punkt P poprowadzono trzy proste równoległe do trzech boków trójkąta. Podzieliły one trójkąt na trzy mniejsze trójkąty i trzy równoległoboki. Pola mniejszych trójkątów wynoszą 1, 4 i 9. Ile wynosi pole wyjściowego trójkąta?



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Trójkąty IPH, DEP i PEG są podobne do trójkąta ABC odpowiednio w skali k, w skali l i w skali m, czy $IP = k \cdot AB$, $DE = l \cdot AB$ i $PF = m \cdot AB$. Po dodaniu stronami i zauważeniu, że $IP + DE + PF = AB$, wychodzi nam, że $k + l + m = 1$.

Skorzystajmy teraz z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych. Wychodzi nam:

$$1 = k^2 \cdot P$$
$$4 = l^2 \cdot P$$
$$9 = m^2 \cdot P$$

gdzie P jest polem trójkąta ABC. Po spierwiastkowaniu

$$1 = k\sqrt{P}$$
$$2 = l\sqrt{P}$$
$$3 = m\sqrt{P}$$

Po dodaniu stronami:

$$6 = (k + l + m)\sqrt{P}$$

I uwzględniwszy, że $k + l + m = 1$, dostajemy $\sqrt{P} = 6$ czyli $P = 36$.