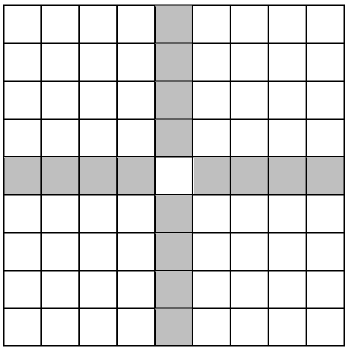
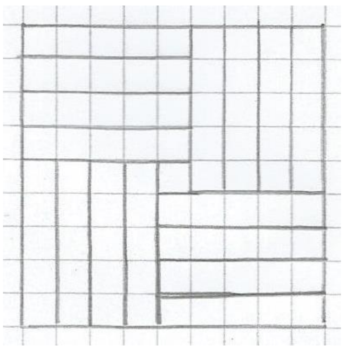
Zestaw 22

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. *W grze w statki, która toczy się na planszy o wymiarach 9 x 9, nasz przeciwnik gdzieś ukrył lotniskowiec, reprezentowany przez prostokąt o wymiarach 5 x 1 lub 1 x 5. Jaka jest minimalna liczba strzałów, które musimy oddać, by choć raz trafić lotniskowiec, niezależnie od jego lokalizacji? Odpowiedź uzasadnij.*



Potrzebujemy 16 strzałów. Zauważmy, że jeżeli ostrzelamy pola zacienione na rysunku powyżej, to na pewno lotniskowiec się nie uchowa (na rysunku nie ma prostokąta o wymiarach 5 x 1, który nie zostałby ostrzelany). Jest to minimalna liczba strzałów, co można wydedukować z poniższego rysunku, na którym jest 16 nienachodzących na siebie możliwych położeń lotniskowca.



2. *Znajdź dziewięciocyfrową liczbę składającą się z cyfr 1, 2, …, 9 ustawionych w pewnej kolejności, o tej własności, że jej każde dwie kolejne cyfry tworzą liczbę dwucyfrową, którą można przedstawić w postaci iloczynu* $k \cdot l$, *gdzie* $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$

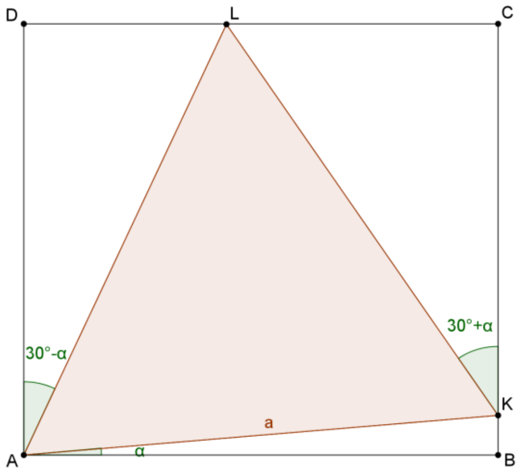
728163549

3. *Mamy 10 worków z monetami. W jednym z nich wszystkie monety są fałszywe, w pozostałych zaś wszystkie są prawdziwe. Prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 11. Ile ważeń na wadze elektronicznej trzeba wykonać, aby wykryć worek z fałszywymi monetami?*

Wystarczy jedno ważenie. Bierzemy z pierwszego worka jedną monetę, z drugiego dwie, z trzeciego trzy i tak dalej. Gdyby wszystkie monety były prawdziwe, ważyłyby 550 gramów. Nadwyżka nad tę liczbę wskaże nam numer worka z fałszywymi monetami (np. jeśli monety będą ważyły 552 gramy, fałszywe monety są w worku drugim)

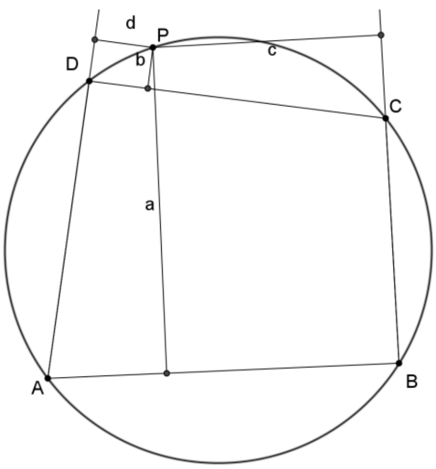
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. *Dany jest prostokąt ABCD. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym trójkąt AKL jest równoboczny. Dowieść, że suma pól trójkątów ABK i ALD jest równa polu trójkąta CLK.*



Oznaczmy kąt BAK przez α, a bok trójkąta przez a. Wówczas $AB = a \cdot \cos\alpha$, $BK = a \cdot \sin\alpha$ a pole trójkąta ABK jest równe $\frac{1}{2}a^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\alpha$. Analogicznie obliczymy, że $[ALD] = \frac{1}{4}a^2 \sin(60° - 2\alpha)$ oraz $[KCL] = \frac{1}{4}a^2 \sin(60° + 2\alpha)$. Teza zadania jest więc równoważna równości $\sin 2\alpha + \sin(60° - 2\alpha) = \sin(60° + 2\alpha)$, którą udowodnisz stosując wzór na sumę sinusów.

2. *Czworokąt ABCD wpisany jest w okrąg. Na tym okręgu leży punkt P. Udowodnić, że iloczyn odległości punktu P od prostych AB i CD jest równy iloczynowi odległości punktu P od prostych BC i DA.*



Oznaczmy odległości punktu P od prostych AB, CD, BC i AD odpowiednio przez a, b, c, d. Ponieważ a jest wysokością trójkąta ABP:

$$a = \frac{2[ABP]}{AB} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin \sphericalangle APB}{AB} = \frac{AP \cdot BP}{2R}$$

Ostatnia równość wynika z twierdzenia sinusów. Analogicznie wylicz b, c, d. Teraz już teza zadania jest oczywista.

3. *Złośliwy czarodziej rzucił urok na jedną z 1000 beczek z winem – po wypiciu choćby kropli każdy zzielenieje w ciągu doby. Codziennie rano dysponujemy dokładnie 10 dzielnymi (i niezielonymi) rycerzami gotowymi ponieść ryzyko. Ile dni trzeba, aby wykryć zaczarowaną beczkę?*

Wystarczy jeden dzień. Numerujemy beczki w systemie dwójkowym, każdej przypisując inny dziesięciocyfrowy ciąg zer i jedynek. Da się to zrobić, bo wszystkich takich ciągów jest $2^{10} = 1024$, a beczek mamy 1000. Każdy rycerz pije wyłącznie z tych beczek, które mają 1 na jego miejscu, czyli np. z beczki podpisanej 0100010010 piją rycerze numer 2, 6 i 9 (zatem z każdej beczki pije inny podzbiór rycerzy). Po dobie odczytujemy numer zaczarowanej beczki z koloru rycerzy: jeśli np. zzielenieli rycerze 2, 6 i 9, to zatruta jest beczka numer 0100010010.