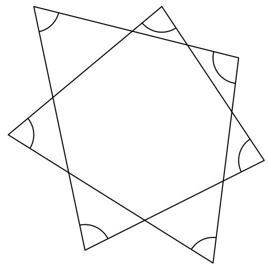
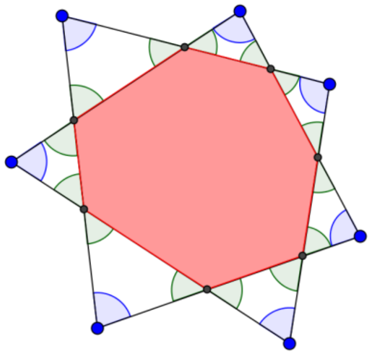
Zestaw 23

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wyznacz sumę miar siedmiu kątów zaznaczonych na poniższym rysunku (w stopniach).





Suma miar zielonych kątów wynosi 720°, co wyliczysz z sumy miar kątów czerwonego siedmiokąta. Suma miar kątów niebieskich wynosi więc $7 \cdot 180° - 720° = 540°$

2. Po przepłynięciu dwóch kilometrów rzeka pod prąd pływak napotkał płynącą z prądem butelkę. Płynął jeszcze przez pół godziny, zawrócił i dogonił butelkę dokładnie w tym momencie, w którym dotarł do punktu wyjścia. Jaka jest prędkość wody w rzece? Zakładamy, że zarówno pływak jak i rzeka płyną ze stałą prędkością.

Rozwiązanie 1.

Oznaczmy przez x prędkość własną pływaka, przez y prędkość rzeki, a przez s drogę, jaką pokonał płynąc pół godziny od spotkania butelki aż do momentu, gdy zawrócił.

Dostajemy układ równań:

$$s = \frac{1}{2}(x - y)$$
$$\frac{2}{y} = \frac{s}{x - y} + \frac{s + 2}{x + y}$$

Pierwsze równanie wynika z faktu, że pływak przez pół godziny płynął pod prąd i pokonał drogę s. Drugie równanie odzwierciedla fakt, że w tym samym czasie butelka z prędkością y przepłynęła 2 km, a pływak pod prąd przepłynął drogę s, a potem z prądem drogę $s + 2$ km.

Gdy będziemy rozwiązywali ten układ równań, po drodze uproszczą się niewiadome y i s i wyjdzie nam, że $x = 2$ km/h.

Rozwiązanie 2.

Butelka płynie z prędkością rzeki, nie porusza się więc względem „miejsca na wodzie”. Możemy więc popatrzeć na tę sytuację tak, jakby butelka stała w miejscu a pływak płynął ze stałą prędkością od butelki do butelki. Droga tam i z powrotem zajęłaby mu godzinę. Przez tę godzinę butelka przepłynęła 2 km, więc prędkość rzeki wynosi 2 km/h.

3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów, przy czym istnieją punkty różnych kolorów. Rozstrzygnij, czy zawsze znajdzie się trójkąt równoboczny o wierzchołkach tego samego koloru.

Istnieje. Weźmy odcinek AB o końcach różnych kolorów. Jego środek, punkt M będzie miał taki sam kolor, jak jeden z końców odcinka. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że punkty A i M są tego samego koloru. Budujemy trójkąty równoboczne o podstawie AB (są dwa takie trójkąty). Jeśli wierzchołek któregokolwiek ma taki sam kolor, jak punkty A i M to sprawa załatwiona. Jeśli oba mają drugi kolor, to tworzą jednokolorowy trójkąt równoboczny z punktem B.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Znajdź największą liczbę pięciocyfrowa składającą się z niezerowych cyfr, która ma poniższe własności:
• pierwsze trzy cyfry tworzą liczbę, która jest 9 razy większa od liczby utworzonej przez dwie ostatnie cyfry,
• trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę, która jest 7 razy większa od liczby utworzonej przez pierwsze dwie cyfry.

Niech $\overline{abcde}$ będzie taką liczbą pięciocyfrową, że $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{de}$ i $\overline{cde} = 7 \cdot \overline{ab}$. Mamy wówczas

$$63 \cdot \overline{de} = 7 \cdot \overline{abc} = 70 \cdot \overline{ab} + 7c = 10 \cdot \overline{cde} + 7c = 1007c + 10 \cdot \overline{de}$$

skąd $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Analogicznie, $\overline{ab} = 17c$. Jeśli $c \geq 6$, to liczby 17*c* and 19*c* są większe od 100. Zatem największa możliwa wartość *c* to 5, a największa możliwą wartość liczby 17119*c* to 85595.

2. Rozwiąż równanie

$$x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$$

Dziedziną jest zbiór liczb dodatnich. Nasze równanie jest równoważne równaniu

$$x^{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$$
$$x^{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Funkcja wykładnicza dla $\neq 1$ jest różnowartościowa, więc

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

czyli $x = \frac{9}{4}$.

Osobno rozważamy przypadek, gdy $x = 1$. Wtedy nasze równanie też jest spełnione, mamy więc dwa rozwiązania.

3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Rozstrzygnij, czy zawsze znajdziemy takie trzy parami różne punkty jednego koloru, aby jeden z nich był środkiem odcinka, którego końcami są dwa pozostałe.

Jeżeli wszystkie punkty są tego samego koloru, to sprawa załatwiona. Jeżeli są punkty różnych kolorów, to weźmy dowolne dwa punkty jednego koloru (nazwijmy go czerwonym). Poprowadźmy przez nie oś liczbową i tak dobierzmy jednostkę, żeby jeden punkt odpowiadał liczbie 1, a drugi liczbie -1. Jeśli punkt 0 jest czerwony, to sprawa załatwiona, jeśli nie, to patrzymy na punkty -3 i 3. Jeśli punkt -3 jest czerwony, to szukanymi punktami są -3, -1 i 1. Analogicznie dla punktu 3. Jeśli obydwa nie są czerwone, to szukanymi punktami są -3, 0, 3.