Zestaw 24

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozstrzygnij, czy można liczby 1, 2, 3, …, 18 rozstawić w wierzchołkach i na środkach krawędzi ośmiościanu foremnego tak, aby każda liczba leżąca na krawędzi ośmiościanu była średnią arytmetyczną liczb leżących na jej końcach.

Nie można. Średnia arytmetyczna dwóch liczb całkowitych jest liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy obie te liczby są jednakowej parzystości, stąd wniosek, że liczby umieszczone na wierzchołkach są jednakowej parzystości. Z drugiej strony liczby 1 oraz 18 muszą znaleźć się na wierzchołkach, bo jedna jest za mała, a druga za duża, żeby być średnią jakiejkolwiek pary liczb z podanego zbioru. Mamy więc sprzeczność, bo 1 i 18 są różnej parzystości.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne a, b, aby liczba n spełniająca równanie też była naturalna.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=n$$

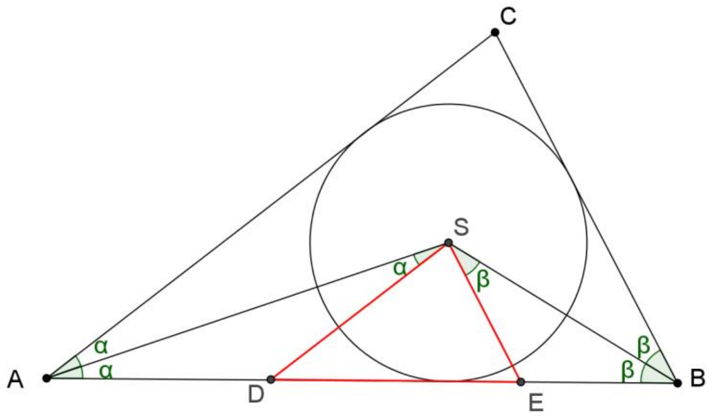
Zauważmy, że $\frac{1}{a}\leq 1$ oraz $\frac{1}{b}\leq 1$, stąd wniosek, że $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ lub $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. W pierwszym przypadku dostajemy $a=b=1$.

W drugim przypadku dostajemy równanie diofantyczne

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$
$$a+b=ab$$
$$ab-a-b+1=1$$
$$a(b-1)-(b-1)=1$$
$$(a-1)(b-1)=1$$

Stąd $a=2$ i $b=2$.

3. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. D i E są takimi punktami boku AB, że odcinek DS jest równoległy do boku AC, a odcinek ES – do boku BC. Udowodnij, że obwód trójkąta DES jest równy długości odcinka AB.



Odcinki AS i BS są zawarte w dwusiecznych kątów odpowiednio A i B (bo środek okręgu wpisanego to punkt przecięcia dwusiecznych). Kąty CAS i ASD oraz ESB i SBC są naprzemianległe. Wynika stąd, że trójkąty ADS i SEB są równoramienne, a z tego już wynika teza zadania.

LICEUM

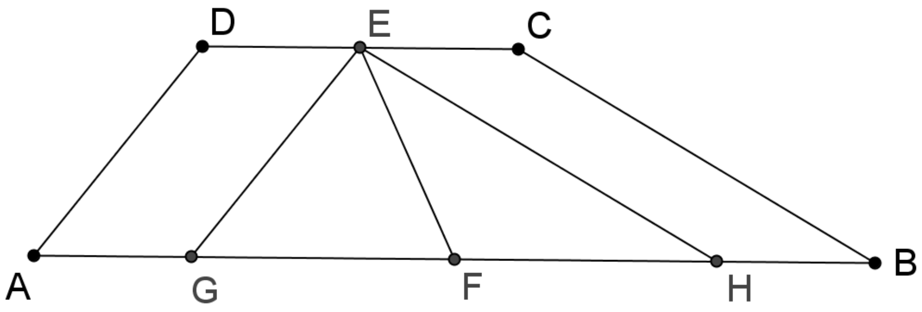
1. Współczynniki a, b, c, d wielomianu $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Udowodnij, że wielomian ten nie posiada pierwiastków całkowitych.

Dla każdej liczby całkowitej wartość wyrażenia $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ jest liczbą nieparzystą, a 0 jest parzyste.

2. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na boku AB tak, że $AD: DB = 2: 1$, zaś punkt E leży na boku BC tak, że $BE: EC = 1: 3$. Odcinki AE i CD przecinają się w punkcie F. Oblicz stosunek pola trójkąta ADF do pola trójkąta ABC.

Rozwiążemy to zadanie metodą środka masy (była o niej mowa na ostatnim kółku). Umieśćmy w punkcie A masę 3, w punkcie B masę 6 a w punkcie C masę 2. Wówczas punkt F będzie środkiem masy trójkąta ABC. Jeśli masy z punktów A i B przeniesiemy do punktu D, to okaże się, że $DF: DC = 2: 11$, czyli wysokość trójkąta ADF stanowi $\frac{2}{11}$ wysokości trójkąta ABC, a jako że podstawa trójkąta ADF stanowi $\frac{2}{3}$ podstawy trójkąta ABC, więc szukany stosunek wynosi $\frac{2}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{33}$

3. Dany jest trapez, w którym suma kątów przy podstawie wynosi 90°, a ramiona mają długości 15 i 36. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw.



Niech punkty E i F będą środkami odpowiednio podstaw CD i AB. Poprowadźmy przez punkt E odcinki równoległe do ramion (zobacz rysunek). Trójkąt GHE jest trójkątem prostokątnym, a EF jest jego środkową, czyli ma długość równą połowie przeciwprostokątnej, a więc 19,5.