Zestaw 25

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c i wysokościach odpowiednio $h_a, h_b,\ h_c$ zachodzi równość:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+\ h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

Niech P oznacza pole naszego trójkąta. Pomnóżmy obie strony Przez $2P$ i skorzystajmy z faktu, że $a=\frac{2P}{h_a}$ a $h_a=\frac{2P}{a}$ (i podobnie dla pozostałych boków). Wówczas obie strony naszej równości przyjmą postać $(a+b+c)(h_a+h_b+\ h_c)$

2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n spełniające równanie

$$2^n\cdot(4-n)=2n+4$$

Jeżeli n jest większe lub równe 4, to prawa strona jest dodatnia, a lewa niedodatnia.
Jeżeli n jest mniejsze lub równe -2, to lewa strona jest dodatnia, a prawa niedodatnia.
Wystarczy więc sprawdzić -1, 0, 1, 2, 3. Z tych liczb spełniają nasze równanie 0, 1 i 2.

3. Przez [x] oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2}\right]+3n-2\cdot(-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

Rozważymy dwa przypadki: n parzyste i n nieparzyste.

a) $n=2k$

$$\left[\frac{2k+4}{2}\right]+3\cdot 2k-2\cdot 1=k+2+6k-2=7k$$

b) $n=2k+1$

$$\left[\frac{2k+1+4}{2}\right]+3\cdot(2k+1)-2\cdot(-1)=k+2+6k+3+2=7k+7=7(k+1)$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W trójkącie kąty spełniają zależność $sin^2\,\alpha + sin^2\,\beta < sin^2\,\gamma$. Udowodnij, że $cos\,\gamma < 0$.

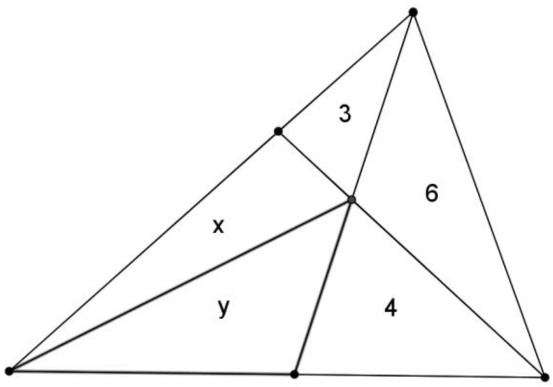
Z twierdzenia sinusów $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Naszą nierówność można więc zapisać tak:

$$\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} < \frac{c^2}{4R^2}$$

$$a^2 + b^2 < c^2$$

a to oznacza, że nasz trójkąt jest rozwartokątny, czyli faktycznie $\cos\gamma < 0$.

2. Trójkąt podzielono dwoma liniami na cztery części, jak na rysunku. Pola trzech z nich wynoszą 3, 6 i 4. Oblicz pole czwartej części.

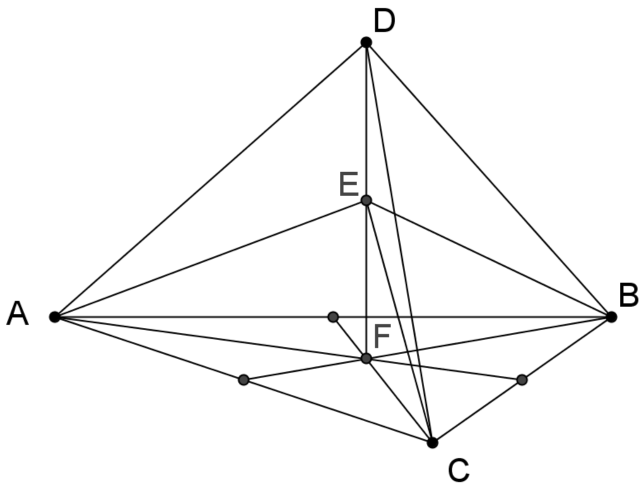


Podzielmy pole czwartej części na dwie części i oznaczmy je x i y jak na rysunku. Ponieważ stosunek pól trójkątów o tych samych wysokościach jest równy stosunkowi podstaw, więc możemy zapisać proporcje wykorzystując fakt, że stosunki pól pewnych trójkątów na rysunku są równe:

$\frac{x+y+3}{6+4} = \frac{y}{4}$ oraz $\frac{x+y+4}{6+3} = \frac{x}{3}$

Dostaliśmy układ równań, który rozwiązujemy i dowiadujemy się, że $x + y = 9{,}5$

3. W czworościanie foremnym środek jednej z wysokości połączono odcinkami z wierzchołkami tego czworościanu nie należącymi do tej wysokości. Wykaż, ze odcinki te są do siebie parami prostopadłe.



Wysokość w czworościanie foremnym o boku a ma długość $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. FE ma więc długość $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Wiemy też, że AF ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Wyliczamy z Pitagorasa, że AE (a więc także BE i CE) ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trójkąty ABE, BCE i ACE są więc trójkątami 45, 45, 90.