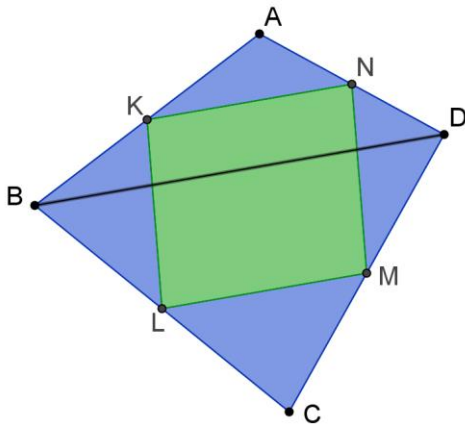




Zestaw 26

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

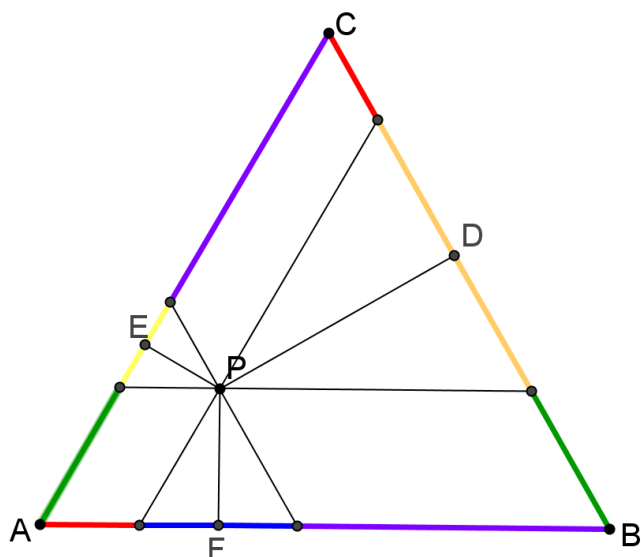
1. Punkty K, L, M, N są środkami odcinków AB, BC, CD, DA . Uzasadnij, że pole części zielonej jest takie samo, jak pole części niebieskiej.



Trójkąt KNA jest podobny do trójkąta BDA w skali $1:2$, więc jego pole stanowi $\frac{1}{4}$ pola trójkąta BDA . Podobnie pole trójkąta LMC stanowi $\frac{1}{4}$ pola trójkąta BDC . Suma pól tych trójkątów stanowi więc $\frac{1}{4}$ pola czworokąta $ABCD$. Podobnie suma pól trójkątów KLB i NMD stanowi $\frac{1}{4}$ pola czworokąta $ABCD$. Niebieski obszar stanowi więc połowę pola tego czworokąta.

2. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano dowolnie punkt P i rzutowano go prostopadle na boki BC, CA i AB , otrzymując w ten sposób odpowiednio punkty D, E i F . Udowodnij, że $AF + BD + CE$ nie zależy od wyboru punktu P .

$AF + BD + CE$ stanowi połowę obwodu danego trójkąta równobocznego, bo odcinki poniżej oznaczone tym samym kolorem mają jednakową długość.



3. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie to $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Mnożymy obie strony przez 2.

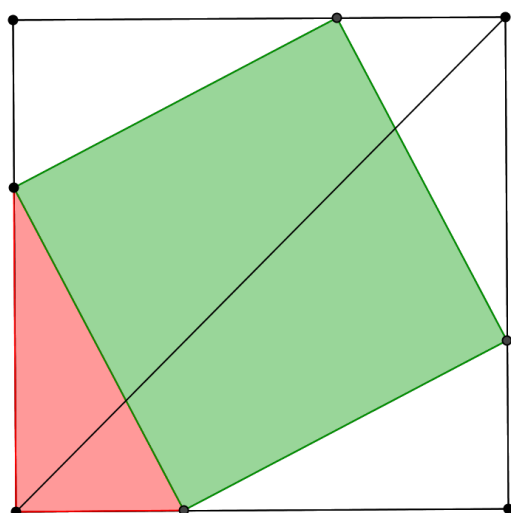
$$\begin{aligned}
 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca \\
 a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 &\geq 0 \\
 (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście zawsze prawdziwa.

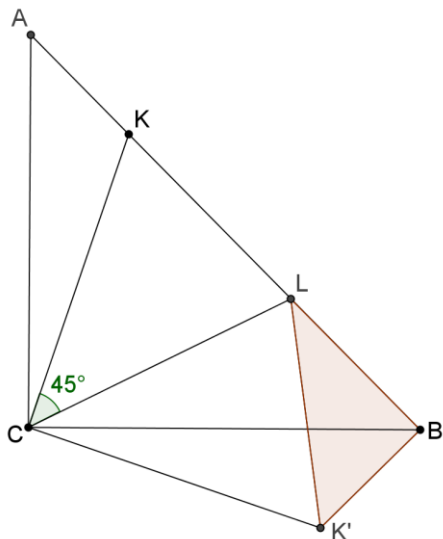
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej na dwie części o równych polach.

Zobacz:



2. Na przeciwprostokątnej AB równoramiennego trójkąta prostokątnego ABC obrano takie punkty K i L , że kąt $KCL = 45^\circ$. Udowodnij, że $AK^2 + LB^2 = KL^2$.



Obróćmy trójkąt CKA o 90° tak, żeby punkt A przeszedł na punkt B . Wówczas kąt LBK' jest prosty (bo obracaliśmy o 90°), a odcinek LK' ma taką samą długość, jak odcinek KL (trójkąty CKL i $CK'L$ są przystające). Dowiedzona równość wynika z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $K'BL$.

3. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie i $ab + bc + ca = 1$ to $a + b + c \geq \sqrt{3}$

Ponieważ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (zob. zadanie 3 dla klas 1-2), więc $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ i dodatkowo $2ab + 2bc + 2ca = 2$ (z założenia), więc $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3$, a co za tym idzie $a + b + c \geq \sqrt{3}$.