



## Zestaw 27

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Turysta idący na stację kolejową przeszedł w ciągu godziny 3,5 km i zorientował się, że idąc nadal z tą prędkością, spóźni się na pociąg o godzinę. Przyspieszył więc i pozostałą część trasy przeszedł z prędkością 5 km/h, docierając na stację pół godziny przed planowanym odjazdem pociągu. Jak długą trasę przebył ten turysta?

Niech  $t$  oznacza czas od „zorientowania się” do odjazdu pociągu, a  $s$  drogę do przebycia od miejsca, gdzie się zorientował do stacji. Z warunków zadania wynika że:

$$s = (t + 1) \cdot 3,5$$

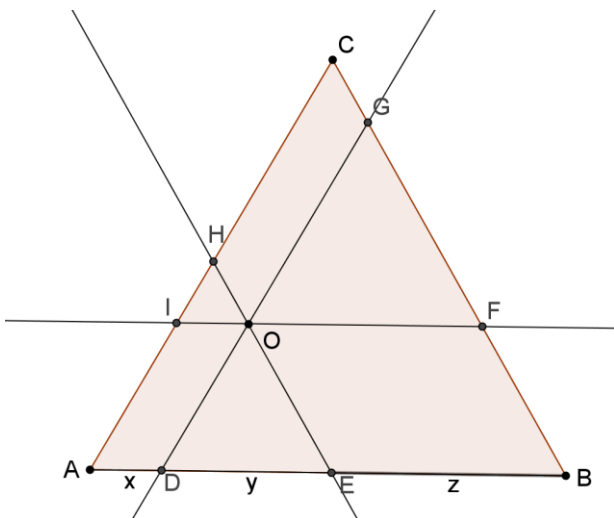
$$s = \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 5$$

Rozwiązując ten układ równań dostajemy, że  $s = 17,5$  czyli cała trasa miała 21 km

2. W dwóch kubkach znajduje się w sumie 1 litr wody. Jeśli z pierwszego kubka przelalibyśmy do drugiego tyle, aby jego zawartość podwoiła się, a następnie z drugiego przelalibyśmy do pierwszego tyle, aby podwoiła się zawartość pierwszego, to w obu kubkach znalazłoby się tyle samo wody. Ile wody znajduje się w każdym z kubków?

Zróbmy to zadanie od końca. Niech  $(a, b)$  oznacza stan kubków w danej chwili, gdzie  $a$  to ilość wody w pierwszym kubku,  $b$  - w drugim. Idąc od końca wygląda to tak:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$ . Na początku było więc w pierwszym kubku  $\frac{5}{8}$  litra wody, a w drugim  $\frac{3}{8}$  litra.

3. Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$  o boku długości  $a$ . Punkt  $O$  jest dowolnym punktem tego trójkąta. Przez punkt  $O$  poprowadzono proste  $k, l, m$ , równoległe odpowiednio do boków  $BC, CA$  i  $AB$ . Proste te przecinają wysokości opuszczone z wierzchołków  $A, B$  i  $C$  odpowiednio w punktach  $X, Y$  i  $Z$ . Oblicz sumę długości odcinków  $AX + BY + CZ$ .



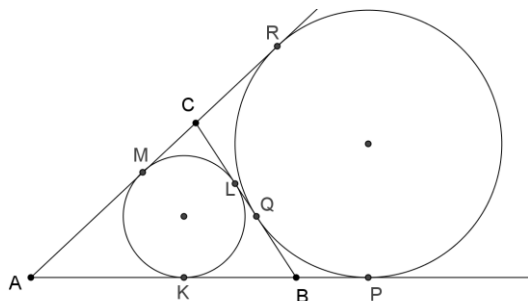
Zadanie sprowadza się do policzenia sumy wysokości trójkątów AEH, DBG i IFC. Pierwszy ma bok długości  $x + y$ , drugi  $y + z$ , a trzeci  $x + z$ . Dostajemy

$$AX + BY + CZ = \frac{(x+y)\sqrt{3}}{2} + \frac{(y+z)\sqrt{3}}{2} + \frac{(x+z)\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x + 2y + 2z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a$$

Szukana suma jest więc równa podwojonej wysokości danego trójkąta.

## KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt ABC. Punktami wspólnymi z bokami AB, BC i CA okręgu wpisanego w ten trójkąt są odpowiednio K, L i M. Okrąg dopisany do trójkąta, leżący po przeciwnej stronie prostej BC, jest styczny do prostych AB, BC i CA odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że  $BK=BL=CQ=CR$ .



Z twierdzenia o odcinkach stycznych  $BK = BL$  i  $CQ = CR$ . Wystarczy pokazać, że  $BL = CQ$ .

Z twierdzenia o odcinkach stycznych  $MR = KP$  bo  $AP = AR$  i  $AK = AM$ . Niech  $MC = CL = a$ ,  $CQ = CR = b$ ,  $BK = BL = c$  i  $BQ = BP = d$ . Mamy:

$$MR = a + b = c + d = KP$$

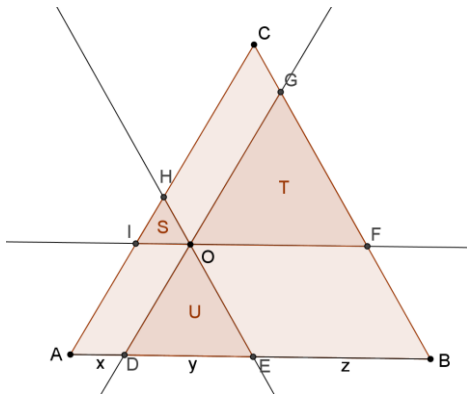
$$LQ = b - a = c - d$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy, że  $b = c$  czyli  $CQ = BL$ .

2. Dwóch złodziei schroniło się w gospodzie. Mieli rano podzielić łup. W nocy zbudził się pierwszy złodziej i stwierdził, że nie ma cierpliwości czekać do świtu. Zakradł się do skrzyni z łupem i podzielił pieniądze na dwie równe części. Została mu jedna moneta, więc wręczył ją jako zapłatę za milczenie czujnemu gospodarzowi, który go zauważył. Swoją część monet ukrył, a resztę zostawił w skrzyni. Po godzinie zbudził się drugi złodziej. On również zakradł się do skrzyni, a znalezione w niej pieniądze podzielił na dwie równe części; podobnie jak kompan jedną monetę pozostającą wręczył gospodarzowi. Schował swoją część i poszedł spać. Rano obaj złodzieje otwarli skrzynię i znalezione w niej monety rozdzielili po równo między siebie, odkładając wcześniej jedną monetę jako zapłatę dla gospodarza. Ile monet mogło być na początku w skrzyni? Podaj wszystkie możliwości.

Niech  $n$  oznacza ilość monet, które każdy ze złodziei wziął rano. Rano w skrzyni było więc  $2n + 1$  monet. To oznacza, że drugi złodziej zastał w skrzyni  $2(2n + 1) + 1 = 4n + 3$  monet, a pierwszy  $2(4n + 3) + 1 = 8n + 7$ . To oznacza, że ilość monet w skrzyni wyrażała się dowolną liczbą, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 7.

3. Przez punkt wewnątrz trójkąta poprowadzono proste równoległe do boków trójkąta. Proste te dzielą trójkąt na sześć części, z których trzy są trójkątami o polach  $S$ ,  $T$ ,  $U$ . Oblicz pole danego trójkąta.



Małe trójkąty są podobne do dużego w skalach wyznaczonych przez ich podstawy:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Oznaczając przez  $P$  pole dużego trójkąta dostajemy więc:

$$\frac{S}{P} = \left( \frac{x}{x+y+z} \right)^2$$

$$\frac{T}{P} = \left( \frac{y}{x+y+z} \right)^2$$

$$\frac{U}{P} = \left( \frac{z}{x+y+z} \right)^2$$

Pierwiastkujemy obustronnie:

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y+z}$$

$$\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{P}} = \frac{y}{x+y+z}$$

$$\frac{\sqrt{U}}{\sqrt{P}} = \frac{z}{x+y+z}$$

i dodajemy stronami:

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{P}} = 1$$

$$\sqrt{S} + \sqrt{T} + \sqrt{U} = \sqrt{P}$$

$$P = (\sqrt{S} + \sqrt{T} + \sqrt{U})^2$$