



Zestaw 28

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij (bez użycia kalkulatora lub komputera), że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{100}$$

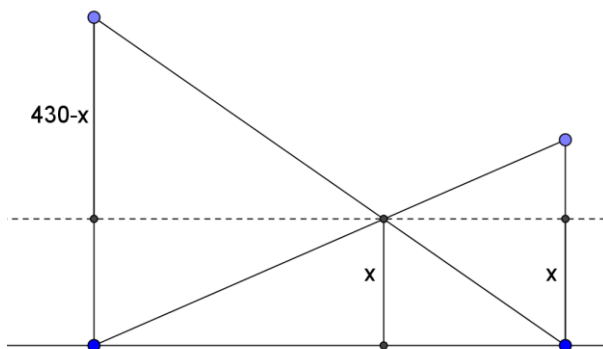
Przesuńmy teraz liczby w licznikach ułamków

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100} < \frac{1}{100}$$

Lewa strona jest mniejsza niż $\frac{1}{100}$ bo jest iloczynem $\frac{1}{100}$ przez liczby mniejsze od 1.

2. W ziemię wbite – w pewnej odległości od siebie – dwa pale: jeden o wysokości 4 m 30 cm, a drugi 2 m 60 cm. Następnie powieszono dwa naprężone sznurki: z wierzchołka pierwszego pala do podstawy drugiego oraz z wierzchołka drugiego pala do podstawy pierwszego. Na jakiej wysokości nad ziemią sznurki się przetną?



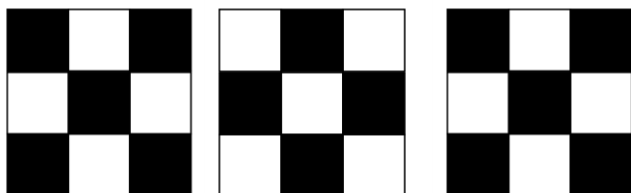
Oznaczmy przez x wysokość, na której przetną się sznurki. Z trójkątów podobnych dostajemy proporcję:

$$\frac{430 - x}{430} = \frac{x}{260}$$

Rozwiązując tę proporcję dostajemy, że przetną się na wysokości $162\frac{2}{69}$ cm.

3. Kostka $3 \times 3 \times 3$ składa się z 27 małych sześcianów. Żuczek matematyczny może przejść z jednego małego sześcianu do drugiego wyłącznie przez sąsiadującą ścianę. Znajdź te wszystkie małe sześciany, z których może wystartować żuczek, jeśli chce w swojej podróży odwiedzić wszystkie małe sześciany – każdy dokładnie raz.

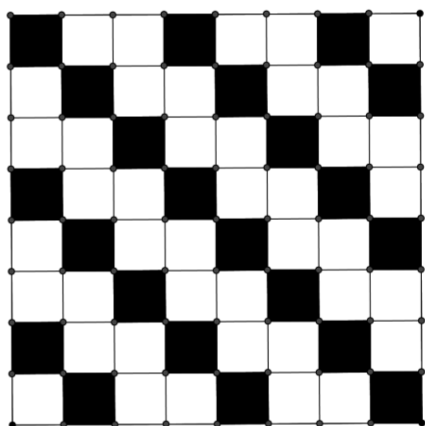
Poniżej trzy warstwy sześcianików pokolorowane w szachownicę:



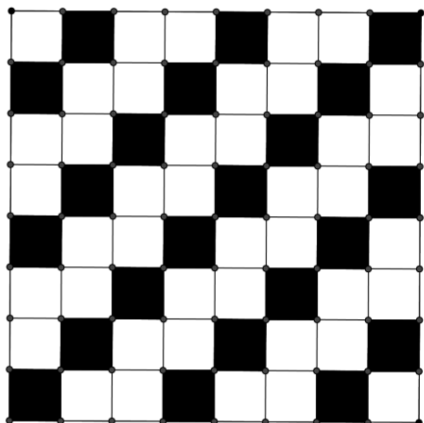
Wędrując żuczek przechodzi z sześcianiku białego do czarnego, a z czarnego do białego. Musi więc zacząć od czarnego, bo jest ich więcej.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

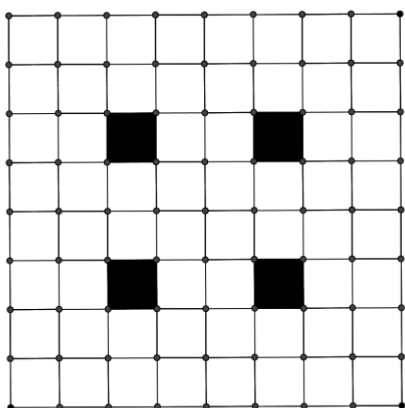
1. Znajdź wszystkie takie pola na szachownicy 8×8 , że szachownicę bez tego pola można pokryć kamieniami 3×1 .



Jeśli pokolorujemy szachownicę jak powyżej, to każdy kamień przykryje dokładnie jedno czarne pole. Kamieni jest 21, a czarnych pól 22. Pole nieprzykryte będzie więc miało kolor czarny. Czy każde czarne pole ma tę własność, że wszystkie pola oprócz niego można pokryć kamieniami 3×1 ? Nie każde. Aby zobaczyć, które tę własność mają pokolorujemy szachownicę tak:



Rozwiązanie zawiera pola, które są czarne przy obu kolorowaniach:



2. Udowodnij, że 32 jest największą liczbą parzystą, której nie da się rozłożyć na sumę dwóch liczb nieparzystych złożonych.

Łatwo pokazać, że 32 nie da się rozłożyć na sumę dwóch liczb nieparzystych złożonych. Pokażemy, że większe liczby parzyste się da. Każdą taką liczbę można przedstawić w jednej z postaci: $10k$, $10k + 2$, $10k + 4$, $10k + 6$, $10k + 8$.

$$10k = 15 + 5(2k - 3)$$

$$10k + 2 = 27 + 5(2k - 5)$$

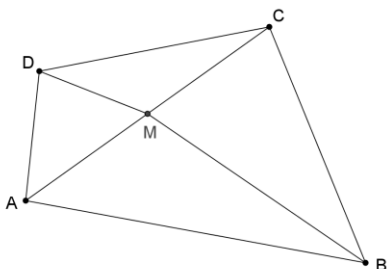
$$10k + 4 = 9 + 5(2k - 1)$$

$$10k + 6 = 21 + 5(2k - 3)$$

$$10k + 8 = 33 + 5(2k - 5)$$

Każda z nich jest więc sumą liczby złożonej podzielnej przez 3 i liczby złożonej podzielnej przez 5.

3. Niech M i N będą odpowiednio środkami przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$. Wykaż, że $[ABM] + [CDM] = [ABN] + [CDN]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ .



Pola trójkątów AMD i DMC są równe, bo mają równe podstawy i wspólną wysokość. Podobnie trójkąty AMB i MBC. Tak więc $[ABM] + [CDM] = \frac{1}{2}[ABCD]$. Podobnie udowodnimy, że $[ABN] + [CDN] = \frac{1}{2}[ABCD]$.