



Zestaw 28

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

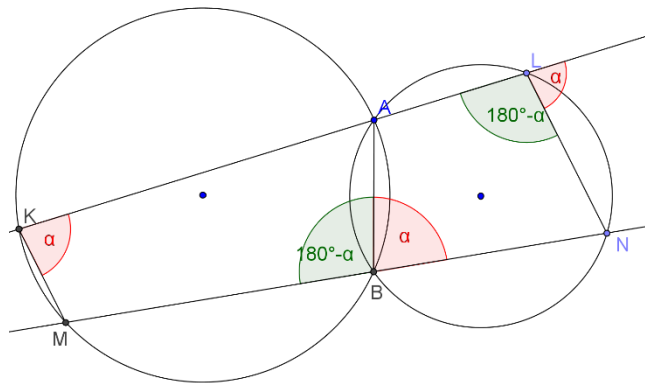
1. Udowodnij, że jeżeli $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą, to również $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

Kwadrat liczby całkowitej jest liczbą całkowitą. Liczba całkowita odjąć 2 jest liczbą całkowitą.

2. Dane są dwa okręgi, przecinające się w punktach A i B . Przez punkt A poprowadzono sieczną obu okręgów, przecinającą pierwszy z nich w punktach A i K , zaś drugi w punktach A i L . Analogicznie przez punkt B poprowadzono sieczną przecinającą oba okręgi odpowiednio w punktach M i B oraz N i B . Udowodnij, że odcinki KM i LN są równoległe.

Skorzystamy z twierdzenia, które mówi, że jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to suma jego kątów leżących naprzeciwko siebie wynosi 180° oraz z własności kątów przyległych i oznaczymy kąty jak na rysunku poniżej.



Odcinki KM i LN są nachylone do prostej KL pod tym samym kątem, są więc równoległe.

3. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

Dzieląc liczbę całkowitą przez 11 możemy otrzymać jedną z 11 reszt: 0, 1, 2, ..., 10.

Ponieważ mamy 111 liczb, więc co najmniej 11 daje tę samą resztę z dzielenia przez 11 (gdyby wszystkie reszty występowały nie więcej niż 10 razy, to mielibyśmy co najwyżej 110

liczb). Oznaczmy tę najczęściej występującą resztę przez r i dodajmy 11 liczb dających resztę r .

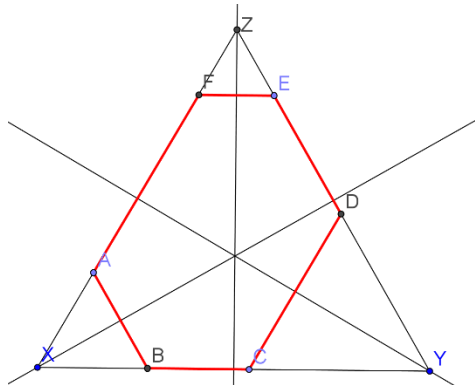
$$\begin{aligned} & 11a + r + 11b + r + 11c + r + 11d + r + 11e + r + 11f + r + 11g + r + 11h + r \\ & \quad + 11i + r + 11j + r + 11k + r \\ & = 11(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k) + 11r \end{aligned}$$

Suma dwóch liczb podzielnych przez 11 jest liczbą podzielną przez 11.

Uwaga! W rozwiązaniu korzystaliśmy z zasady szufladkowej Dirichleta (warto o niej poczytać) oraz z faktu, że liczbę podzielną przez 11 zapisujemy jako $11n, n \in \mathbb{Z}$, a liczbę dającą resztę r z dzielenia przez 11 jako $11n + r, n \in \mathbb{Z}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

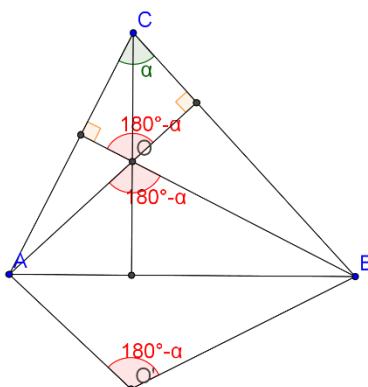


Sześciokąt, w którym każdy kąt ma miarę 120° , nazywamy sześciokątem równokątnym. Wiele zadań dotyczących sześciokątów równokątnych można rozwiązać uzupełniając je do trójkąta równobocznego, jak na rysunku powyżej. Narożne trójkąty ABX, CDY, FEZ są równoboczne, a więc w każdym z nich symetralna podstawy jest dwusieczną kąta przy wierzchołku. Wynika stąd, że symetralne odcinków AB, CD i EF są dwusiecznymi kątów trójkąta XYZ , a w trójkącie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

2. Uzasadnij, że dla dowolnego m całkowitego ułamek $\frac{14m+3}{21m+4}$ jest nieskracalny.

W dowodzie wykorzystamy fakt, że jeżeli pewna liczba dzieli dwie inne liczby, to dzieli również ich różnicę. Niech $x = NWD(14m + 3, 21m + 4)$. Liczba x dzieli więc $(21m + 4) - (14m + 3) = 7m + 1$. I dalej, x dzieli $(14m + 3) - (7m + 1) = 7m + 2$ oraz $(7m + 2) - (7m + 1) = 1$. Skoro x dzieli 1, więc $x = 1$, a jeżeli NWD licznika i mianownika ułamka wynosi 1, to ułamek ten jest nieskracalny.

3. Wykaż, że obraz ortocentrum trójkąta w symetrii osiowej względem prostej zawierającej dowolny bok trójkąta należy do okręgu opisanego na tym trójkącie.



Punkt O' jest obrazem ortocentrum w symetrii względem prostej AB . Korzystając z sumy kątów w czworokącie, z kątów wierzchołkowych i z własności symetrii, jak na rysunku powyżej, wykazujemy, że kąty ACB i $AO'B$ dają w sumie 180° , na czworokącie $AO'BC$ da się więc opisać okrąg. Jest to oczywiście ten sam okrąg, który jest opisany na trójkącie ABC .