



Zestaw 30

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że równanie $x^2 - 7y^2 = 0$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych różnych od 0.

Zapiszmy nasze równanie tak: $x^2 = 7y^2$. Jeśli rozłożymy lewą i prawą stronę na czynniki pierwsze, to po lewej stronie mamy parzystą liczbę siódemek, a po prawej nieparzystą.

2. Rozstrzygnij, dla jakich liczb naturalnych n liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest pierwsza.

$$n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n)$$

Rozłożyliśmy liczbę $n^4 + n^2 + 1$ na czynniki. Ponieważ ma to być liczba pierwsza, więc mniejszy z czynników równa się 1.

$$n^2 + 1 - n = 1$$

$$n^2 - n = 0$$

$$n = 0 \text{ lub } n = 1$$

Tylko dla $n = 1$ dostajemy liczbę pierwszą.

3. Dwie świece jednakowej długości wykonano z różnych rodzajów parafiny. Jedna spala się całkowicie w ciągu 9 godzin, a druga w ciągu 6 godzin. Świece zapalono równocześnie. Za ile godzin świeca spalająca się wolniej będzie dwa razy dłuższa od drugiej świecy?

W ciągu godziny spali się $\frac{1}{9}$ pierwszej świecy i $\frac{1}{6}$ drugiej, więc w ciągu x godzin spali się $\frac{x}{9}$ pierwszej świecy i $\frac{x}{6}$ drugiej, a zostanie $1 - \frac{x}{9}$ pierwszej i $1 - \frac{x}{6}$ drugiej. Dostajemy więc równanie

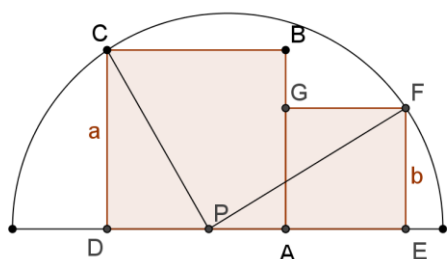
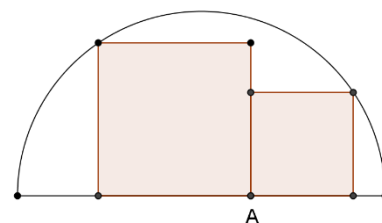
$$1 - \frac{x}{9} = 2 \left(1 - \frac{x}{6} \right)$$

Rozwiązaniem jest 4,5.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W półokrąg „wpisano” dwa kwadraty, jak na rysunku obok. Jak powinien być położony punkt A, żeby suma pól tych kwadratów była największa?

Pokażemy, że niezależnie od położenia punktu A, suma pól naszych kwadratów jest równa kwadratowi promienia półokręgu.



Niech lewy kwadrat ma bok długości a , a prawy bok długości b . Wybierzmy na średnicy półokręgu taki punkt P, żeby $DP = b$ i $PE = a$. Wówczas trójkąty CDP i PEF są przystające, a więc odcinki PC i PF są równe, czyli punkt P jest środkiem półokręgu. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy:

$$a^2 + b^2 = r^2$$

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ y + z + t = 15 \\ x + z + t = 12 \end{cases}$$

Niech $x + y + z + t = s$. Nasz układ równań możemy zapisać tak:

$$\begin{cases} s - t = 14 \\ s - z = 10 \\ s - x = 15 \\ s - y = 12 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami:

$$\begin{aligned} 4s - s &= 51 \\ s &= 17 \end{aligned}$$

Teraz łatwo już dostaniemy, że $x = 2, y = 5, z = 7, t = 3$.

3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$264x + 51y = 20182018$$

To równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, bo lewa strona jest podzielna przez 3, a prawa nie.