



Zestaw 32

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Liczba x jest dodatnia. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć wyrażenie $x^2 + \frac{1}{x}$.

Najmniejsza możliwa wartość to $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

$$x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3 \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Wykorzystaliśmy nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

Trzeba jeszcze pokazać, że ta wartość jest faktycznie osiągnięta. Jest osiągnięta dla $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, czyli wtedy, gdy $x^2 = \frac{1}{2x}$.

2. Wykaż, że dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)\left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10$$

Po usunięciu nawiasów i uporządkowaniu nasza nierówność przybierze postać:

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + x^8 + \frac{1}{x^8} + x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 10$$

Udowodnimy najpierw, że $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

Podobnie udowodnimy, że $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$, $x^6 + \frac{1}{x^6} \geq 2$, $x^8 + \frac{1}{x^8} \geq 2$, $x^{10} + \frac{1}{x^{10}} \geq 2$

Dodając do siebie stronami te pięć nierówności dostajemy

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + x^8 + \frac{1}{x^8} + x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 10$$

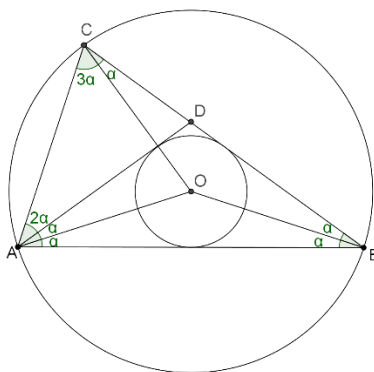
Uwaga! Choć prawdą jest, że dla każdego $x \neq 0$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

nie jest prawdą, że dla każdego $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

3. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta AD . Wyznaczyć kąty trójkąta ABC , jeśli środek okręgu wpisanego w trójkąt ABD jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .



Uzasadnijmy oznaczenia na rysunku. Kąty BAO i OAD są równe, bo środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych. Kąty BAD i DAC są równe, bo AD jest dwusieczną, kąty OAC i ACO są równe, bo trójkąt AOC jest równoramienny (OA i OC są promieniami okręgu opisanego). Spróbuj sam uzasadnić miarę α dla pozostałych kątów. Dostajemy więc $10\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 18^\circ$. Nasz trójkąt ma więc kąty $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij nierówność $\frac{x^2+y^2+z^2+3}{2} \geq x + y + z$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$x + 1 \geq 2x$$

$$y + 1 \geq 2y$$

$$z + 1 \geq 2z$$

Po dodaniu stronami i podzieleniu przez 2 dostajemy tezę.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które są 11 razy większe od sumy swych cyfr.

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzimy, że (oprócz 0) nie ma liczby spełniającej warunki zadania wśród liczb jedno i dwucyfrowych. Dla liczb trzycyfrowych mamy:

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

$$89a = b + 10c$$

Ponieważ a, b i c są cyframi, więc prawa strona równania jest dwucyfrowa, a więc $a = 1$,

$$b = 9$$

$$\text{ i } c = 8.$$

Rozważmy liczby więcej niż dwucyfrowe. Wówczas:

$$10^n a_n + \dots + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 11a_n + \dots + 11a_0$$

$$(10^n - 11)a_n + \dots + 89a_2 = a_1 + 10a_0$$

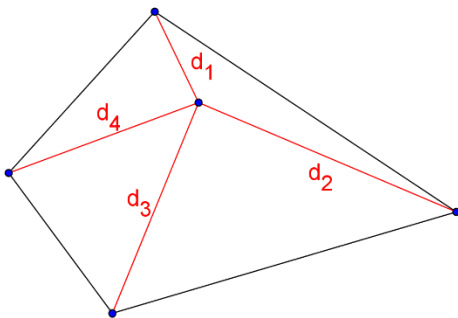
Prawa strona jest dwucyfrowa, a lewa więcej niż dwucyfrowa. Mamy więc sprzeczność.

Jedynym więc (poza 0) rozwiązaniem jest liczba 198.

3 . Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu wewnętrznego czworokąta wypukłego od jego wierzchołków. Wykaż, że

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2\sqrt{2S}$$

gdzie S oznacza pole czworokąta.



Zauważmy najpierw, że pole trójkąta o bokach a i b spełnia zależność:

$$P \leq \frac{ab}{2}$$

Istotnie. $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, gdzie γ jest kątem między bokami a i b , a $\sin \gamma$ jest mniejszy lub równy 1. Traktując pole czworokąta jako sumę pól czterech trójkątów widocznych na rysunku otrzymujemy zależność:

$$2S \leq d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_1$$

Wykorzystując tę nierówność oraz nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= (d_1 + d_3) + (d_2 + d_4) \geq 2\sqrt{(d_1 + d_3)(d_2 + d_4)} \\ &= 2\sqrt{d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_1} \geq 2\sqrt{2S} \end{aligned}$$