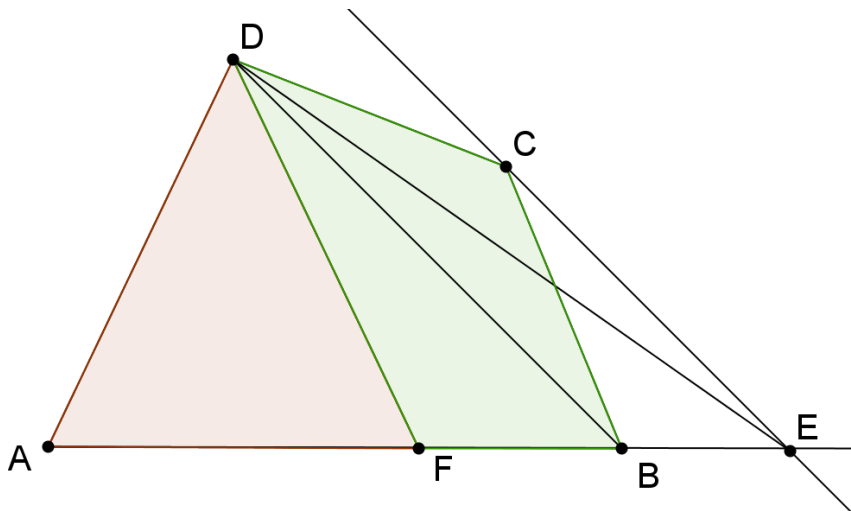




Zestaw 31

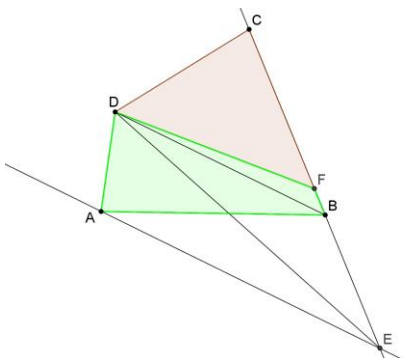
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Jak czworokąt $ABCD$ podzielić na dwie części o równych polach prostą przechodzącą przez wierzchołek D ?



Prowadzimy prostą równoległą do przekątnej BD , przechodzącą przez punkt C . Przecina ona prostą AB w punkcie E . Czworokąt $DBEC$ jest trapezem, więc pola trójkątów DBC i DBE są równe, a to oznacza, że trójkąt AED ma takie samo pole jak czworokąt $ABCD$. Punkt F jest środkiem odcinka AE , prosta DF połowi więc pole trójkąta AED , a więc także pole czworokąta $ABCD$.

Może się zdarzyć, że punkt F wyląduje poza odcinkiem AB , na odcinku BE . Wówczas prowadzimy prostą równoległą do BD przez wierzchołek A i przez E oznaczamy punkt przecięcia tej prostej z prostą BC . Punkt F to środek odcinka CE , a odcinek DF dzieli nasz czworokąt na dwie części o jednakowych polach.



2. Kolorowe koperty pakowane są w paczkach po 100 sztuk. Zdjęcie paczki z półki zajmuje sprzedawcy 5 sekund, wyjęcie jednej koperty z paczki – sekundę (niezależnie od tego, czy wyjmie po jednej kopercie, czy odlicza odpowiednią liczbę i wyjmie razem). Klient poprosił o 10 kopert zielonych, 10 niebieskich i 60 żółtych. W jakim najkrótszym czasie sprzedawca może mu wręczyć koperty?

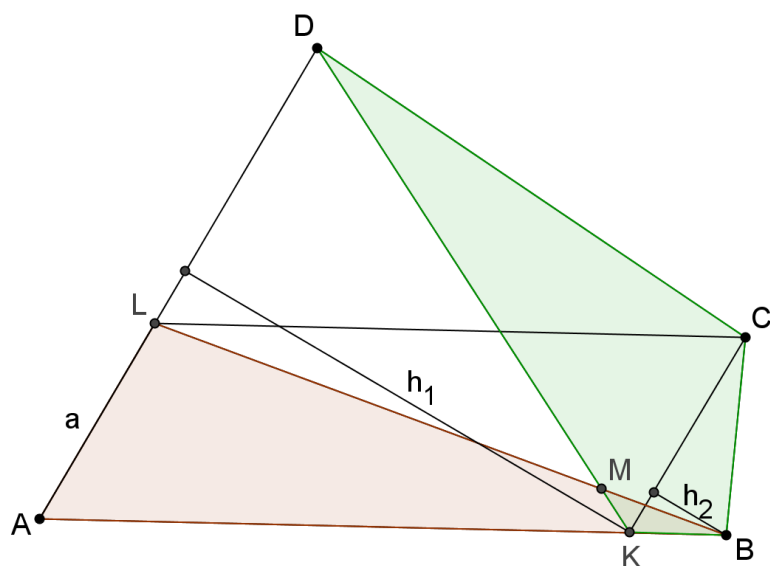
75 sekund. Potrzebuje 15 sekund na zdjęcie trzech paczek, następnie wyjmie po 10 sztuk z dwóch paczek, a z trzeciej wyjmie 40 sztuk i daje klientowi resztę.

3. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2025. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Postępujemy tak do momentu, gdy zostanie nam jedna liczba. Czy może nią być liczba 34?

Zauważmy, że cały czas nie zmienia się parzystość sumy liczb zapisanych na tablicy. Suma $1+2+\dots+2025$ jest nieparzysta, a liczba 34 parzysta, nie może więc pozostać na końcu.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest czworokąt wypukły ABCD. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt AKCL jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że pola czworokątów AKML i BCDM są równe.



Żeby pola czworokątów AKML i BCDM były równe, równe muszą być pola trójkąta ABL i czworokąta KBCD. Oznaczmy boki AL i KC przez a , wysokość równoległoboku poprowadzoną na odcinek AL przez h_1 , a wysokość trójkąta KBC poprowadzoną na bok KC przez h_2 .

Pole trójkąta ABL wynosi $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2)$, a pole czworokąta KBCD $\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2$, czyli tyle samo.

2. Rysujemy dziesięciokąt foremny i w każdym wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów i przełożeniu każdego z nich do dowolnego wierzchołka sąsiadującego z tym, w którym leżał. Czy można doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żetony leżą w jednym wierzchołku?

Nie można. Ponumerujmy kolejne wierzchołki dziesięciokąta liczbami 1;2; ... ;10. Rozważmy liczbę N żetonów w wierzchołkach o numerach nieparzystych. W wyjściowej sytuacji wynosi ona 5. Podczas ruchu zmienia się o 2 lub pozostaje stała. Wobec tego N jest stale nieparzysta. Gdyby żetony można było zgromadzić w jednym wierzchołku, to liczba N byłaby równa 0 lub 10, w szczególności byłaby parzysta.

3. Mamy 17 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma dowolnych dziewięciu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych ośmiu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

Z założenia wynika, że:

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \dots + a_9 &> a_{10} + a_{11} + \dots + a_{17} \\a_9 + a_{10} + \dots + a_{17} &> a_1 + a_2 + \dots + a_8\end{aligned}$$

Po dodaniu stronami i redukcji wyrazów podobnych dostajemy

$$\begin{aligned}2a_9 &> 0 \\a_9 &> 0\end{aligned}$$

Podobnie pokażemy, że pozostałe liczby są dodatnie.