



## Zestaw 1

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Pewien hinduski maharadża pozostawił swoim sześciu synom w spadku sporą ilość wielkich diamentów jednakowej wartości, przy czym rozporządził, że pierwszy z synów weźmie jeden diament i  $\frac{1}{7}$  pozostałych, drugi – dwa diamenty i  $\frac{1}{7}$  pozostałych i tak dalej. Po dokonanych podziale okazało się, że każdy z synów otrzymał tę samą ilość diamentów. Ile było wszystkich diamentów?

Aby ułożyć równanie, które pozwoli rozwiązać zadanie wystarczy zauważyć, że pierwszy syn dostał  $\frac{1}{6}$  diamentów (dostali po równo, więc każdy dostał  $\frac{1}{6}$ ). Oznaczmy liczbę diamentów przez  $x$ . Wówczas:

$$1 + \frac{1}{7}(x - 1) = \frac{1}{6}x$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 36.

Zadanie to stosunkowo łatwo rozwiązać metodą zgadywania. Szukamy liczby podzielnej przez 6 (bo było sześciu synów), która zmniejszona o 1 daje liczbę podzielną przez 7 (aby pierwszy syn dostał całkowitą ilość diamentów). 36 spełnia warunki zadania.

Ta metoda ma jednak istotną wadę. Nie upewnia nas, że 36 jest **jedynym** rozwiązaniem.

2. W zapisie

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

wstaw między każde dwie jedynki znak działania (+, -, ·, lub :) tak, aby uzyskać w wyniku kolejne liczby naturalne od 11 do 25. Można także używać nawiasów

Można to zrobić na przykład tak:

$$11 = (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$12 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 1 \cdot 1$$

$$13 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 1 + 1$$

$$14 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) + 1 + 1$$

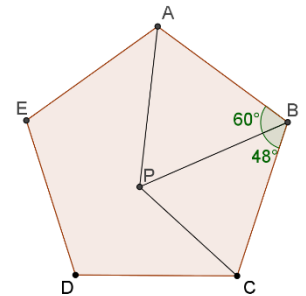
$$15 = (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot 1 \cdot 1$$

$$16 = (1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

$$\begin{aligned}
17 &= (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) + 1 \cdot 1 \\
18 &= (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) + 1 + 1 \\
19 &= (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 1 + 1 \\
20 &= (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) + 1 + 1 \\
21 &= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) \\
22 &= [(1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1) - 1] \cdot (1 + 1) \\
23 &= (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 \\
24 &= (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 1 \\
25 &= (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1)
\end{aligned}$$

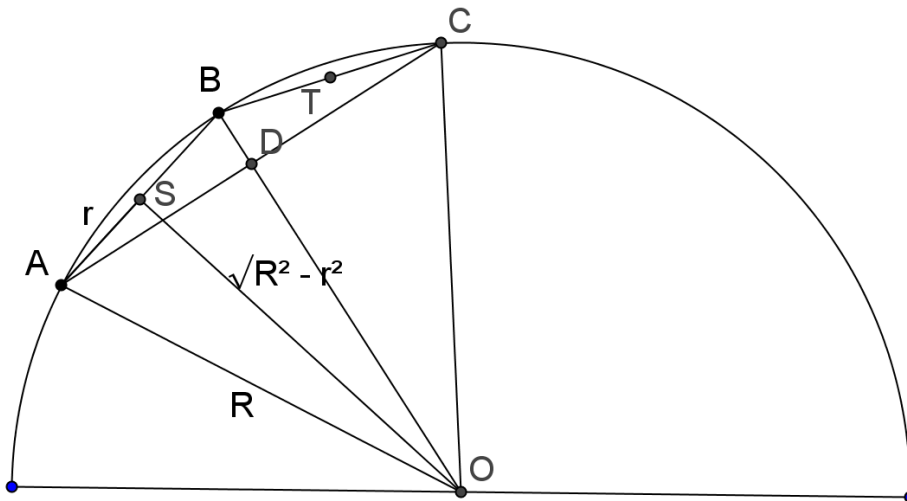
3. Dany jest pięciokąt foremny  $ABCDE$  i taki punkt  $P$  wewnątrz niego, że trójkąt  $ABP$  jest równoboczny. Jaka jest miara kąta  $BCP$ ?

Kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę  $108^\circ$ . Miara kąta  $PBC$  wynosi  $48^\circ$  ( $108^\circ - 60^\circ$ ). Trójkąt  $PBC$  jest równoramienny, łatwo więc obliczyć, że kąt  $BCP$  ma miarę  $66^\circ$ .



### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Na półsferze o promieniu  $R$  leżą dwa styczne do siebie okręgi o promieniu  $r$ . Wyznacz największą odległość między dwoma punktami należącymi do tych okręgów.



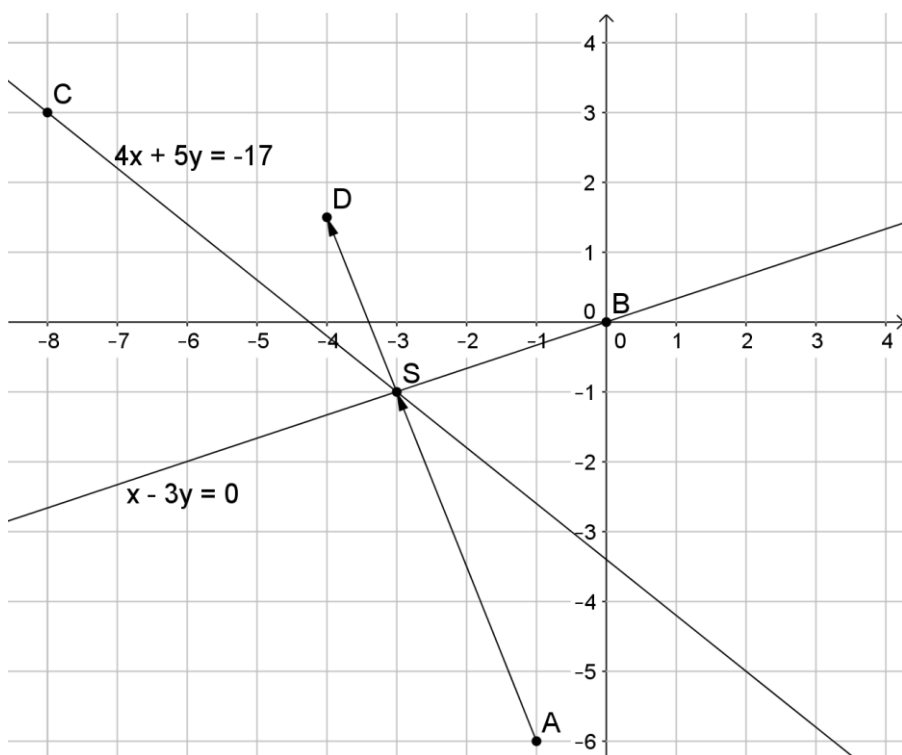
Weźmy przekrój półsferzy zawierający jej środek oraz środki okręgów, o których mowa w zadaniu. Na rysunku punkt  $B$  to punkt styczności, a punkty  $A$  i  $C$  to najbardziej oddalone punkty naszych okręgów. Czworokąt  $ABCO$  to deltoid, którego dwa boki mają długość po  $2r$ ,

a dwa pozostałe i przekątna  $OB$  mają długość  $R$ . Zadanie sprowadza się do policzenia długości przekątnej  $AC$ .

W deltoidzie przekątne przecinają się pod kątem prostym, więc wystarczy policzyć długości wysokości trójkąta  $ABO$  poprowadzonej z wierzchołka  $A$  i ją podwoić.

Wysokość  $SO$  trójkąta  $ABO$  ma długość  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , a jego pole  $\frac{1}{2}r\sqrt{R^2 - r^2}$ . Łatwo teraz policzyć wysokość  $AD$ . Ma ona długość  $\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ . Odcinek  $AC$  ma więc długość  $\frac{2r\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ .

2. Oblicz pole trójkąta, mając dane dwie proste  $4x + 5y + 17 = 0$  i  $x - 3y = 0$ , zawierające środkowe trójkąta, oraz jeden jego wierzchołek  $A = (-1, -6)$ .



Znajdźmy najpierw środek ciężkości naszego trójkąta. Jest to oczywiście punkt przecięcia prostych

$4x + 5y + 17 = 0$  i  $x - 3y = 0$ . Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 17 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy, że środkowe przecinają się w punkcie  $S(-3, -1)$ .

Wyznamy teraz współrzędne środka  $D$  odcinka  $BC$  (gdzie  $B$  i  $C$  to brakujące wierzchołki trójkąta). Wektor  $\vec{SD}$  to połowa wektora  $\vec{AS}$  (patrz: twierdzenie o środkowych). Z rachunku wektorów wynika, że punkt  $D$  ma współrzędne  $(-4; 1,5)$ .

Kolejnym krokiem będzie wyznaczenie współrzędnych punktów  $B$  i  $C$ . Punkt  $B$  leży na prostej  $x - 3y = 0$ , jego współrzędne można więc zapisać tak:  $(a, \frac{a}{3})$ . Analogicznie, punkt  $C$  ma

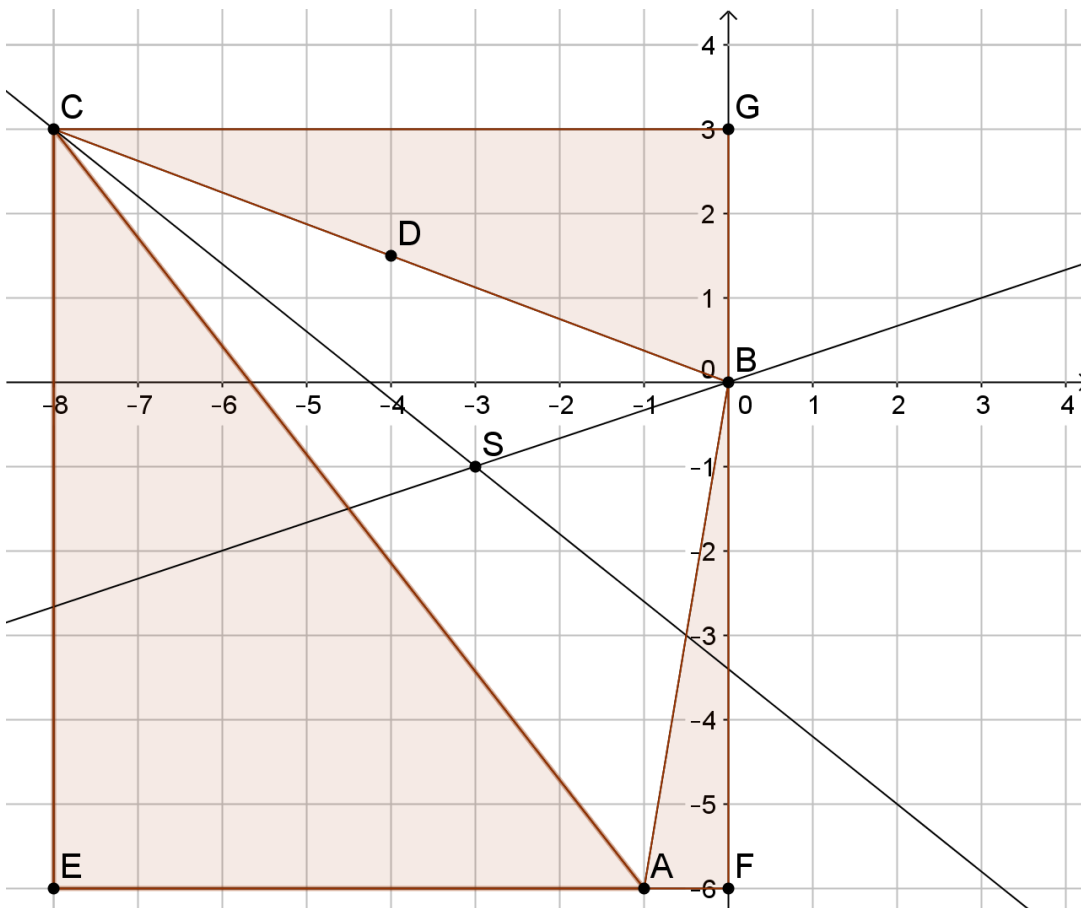
współrzędne  $(b, \frac{-4b-17}{5})$ . Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka układamy układ równań:

$$\begin{cases} -4 = \frac{a+b}{2} \\ -1,5 = \frac{\frac{a}{3} + \frac{-4b-17}{5}}{2} \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para  $a = 0$  i  $b = -8$ . Są to pierwsze współrzędne punktów  $B$  i  $C$ .

Wyliczamy drugie współrzędne i mamy brakujące wierzchołki trójkąta:

$B(0,0), C(-8,3)$ . Teraz już łatwo policzyć pole trójkąta  $ABC$ . Można przykładowo zamknąć go w prostokącie  $EFGC$  i od pola tego prostokąta odjąć pola trójkątów prostokątnych  $EAC$ ,  $AFB$  i  $BGC$ . Wychodzi 25,5.



3. Rozwiąż równanie:

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} \frac{1}{n-m+1} = \frac{1}{3!}$$

gdzie  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Przekształćmy lewą stronę skracając, co się da.

$$\frac{(n+1)!}{(m+1)! \cdot (n+1-m-1)!} \cdot \frac{m! \cdot (n+1-m)!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n-m+1}$$

$$= \frac{1}{(m+1) \cdot (n-m)!} \cdot \frac{(n-m+1)!}{n-m+1} = \frac{1}{m+1}$$

Nasze równanie przybiera więc postać:

$$\frac{1}{m+1} = \frac{1}{6}$$

Więc  $m = 5$ ,  $n$  zaś jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą 5.