Zestaw 1

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Pierwszą cyfrą liczby 6-cyfrowej jest 3. Jeżeli tę cyfrę przesuniemy z pierwszego miejsca na ostatnie, to otrzymamy czwartą część pierwszej liczby. Co to za liczba?

Niech nasza liczba wygląda tak: $3abcde$. Liczbę $abcde$ oznaczmy przez x. Wówczas wyjściową liczbę możemy zapisać tak: $300000 + x$, natomiast liczbę, którą otrzymamy po ustawieniu trójki na ostatnim miejscu tak: $10x + 3$.

Z treści zadania wynika równanie:

$$300000 + x = 4(10x + 3)$$

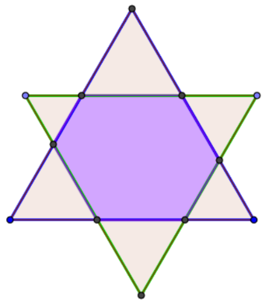
Jego rozwiązaniem jest liczba 7692, a z tego wynika, że wyjściowa liczba to 307692.

2. Zapalono dwie świece o różnych długościach i grubościach. Dłuższa z nich spala się zupełnie w ciągu 3 godzin, krótsza w ciągu 5 godzin. Po dwóch godzinach palenia długości obu świec wyrównały się. Ile razy jedna świeca była dłuższa od drugiej przed zapaleniem?

Dłuższa świeca spala się w ciągu trzech godzin, czyli po dwóch godzinach $\frac{2}{3}$ tej świecy uległo spaleniu, została $\frac{1}{3}$. Analogicznie policzymy, że po dwóch godzinach z krótszej świecy pozostało $\frac{3}{5}$. Jeżeli oznaczymy długość dłuższej świecy przez d, a długość krótszej przez k, to fakt, że po dwóch godzinach miały równe długości możemy zapisać tak:

$$\frac{1}{3}d = \frac{3}{5}k$$

Z tego wyliczymy, że $d = \frac{9}{5}k$.



3. Dwa trójkąty równoboczne o obwodach 17 i 19 są położone jak na rysunku (ich boki są parami równoległe). Oblicz obwód sześciokąta, którego wierzchołki są punktami przecięcia boków trójkąta.

Trójkąty doklejone do fioletowego sześciokąta są równoboczne (ponieważ boki wyjściowych trójkątów były równoległe, wszystkie ich kąty mają po 60°). Obwód sześciokąta zawiera po jednym boku z każdego takiego trójkąta, jest więc trzy razy krótszy niż suma obwodów tych sześciu trójkątów, a ona wynosi: $17 + 19 = 36$. Obwód sześciokąta ma więc długość 12 cm.

Uwaga! Niektórzy z was przyjęli, że spośród sześciu trójkątów doklejonych do sześciokąta trzy są jednakowe między sobą i pozostałe trzy też są jednakowe między sobą. Nie musi tak być.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą . Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby p przez 30 nie jest liczbą złożoną .

Jest 30 możliwych reszt z dzielenia przez 30: 0, 1, 2, …., 29. Pokażemy, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to reszta z dzielenia tej liczby przez 30 nie może wynosić 4. W pozostałych przypadkach dowód będzie analogiczny.

Załóżmy, że reszta z dzielenia p przez 30 wynosi 4. Wówczas możemy napisać:

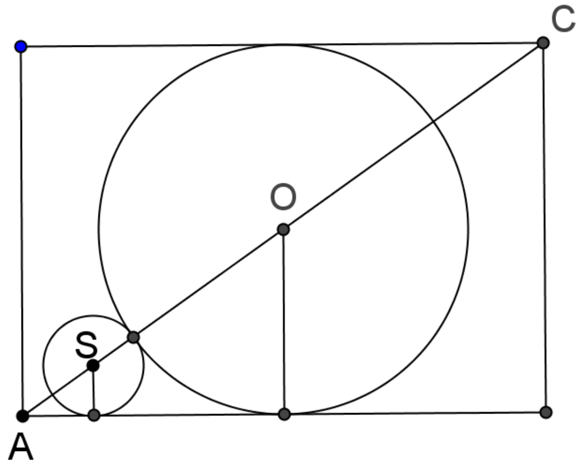
$$p = 30k + 4, k \in C$$

Prawa strona jest parzysta i większa od 3, więc lewa też, wbrew założeniu, że p jest liczbą pierwszą.

Dowód się udaje, bo wszystkie liczby złożone między 0 a 29 są dzielnikami liczby 30.

2. Dany jest sześcian o krawędzi a. Oblicz promień kuli stycznej do kuli wpisanej w ten sześcian i do trzech ścian sześcianu.

Weźmy przekrój sześcianu zawierający przekątną podstawy i przekątną sześcianu.



Promień kuli wpisanej w sześcian ma długość $\frac{a}{2}$. Oznaczmy promień kuli stycznej do kuli wpisanej i do trzech ścian przez r. Przekątna sześcianu AC ma długość $a\sqrt{3}$. Z podobieństwa trójkątów odcinek SA ma długość $r\sqrt{3}$. Na odcinek OA wchodzą promienie naszych kul i odcinek SA. Dostajemy więc równanie:

$$r\sqrt{3} + r + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Wyliczymy z niego, że $r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+2)}$.

3. *Dla jakich wartości parametru m nierówność*

$$(m^2 - 1) \cdot 25^x - 2(m-1) \cdot 5^x + 2 > 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x?

Dla $m = 1$ dostajemy nierówność $2 > 0$, która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x.

Dla $m = -1$ dostajemy nierówność $4 \cdot 5^x > 0$ która również jest zawsze spełniona.

W pozostałych przypadkach robimy podstawienie $t = 5^x$:

$$(m^2 - 1) \cdot t^2 - 2(m-1) \cdot t + 2 > 0$$

Aby nierówność była zawsze spełniona wystarczy, by część paraboli odpowiadająca dodatnim argumentom ($t > 0$) znajdowała się nad osią OX.

Sprawdzamy, kiedy ramiona paraboli są skierowane w górę:

$$(m^2 - 1) > 0$$
$$m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Rozważamy dwa przypadki:

a) nie ma miejsc zerowych
   $\Delta < 0$ dla $m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
b) miejsca zerowe są, ale dla argumentów dodatnich mamy wartości dodatnie
   $\Delta \geq 0$, wierzchołek na lewo od 0 i wartość dla 0 dodatnia, czyli: $m \in \langle -3,1 \rangle$ i $\frac{2(m-1)}{2(m^2-1)} < 0$ i $2 > 0$, co jest spełnione dla $m \in \langle -3, -1 \rangle$

Ostatecznie nasza nierówność jest zawsze spełniona, gdy $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$.