Zestaw 3

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Ile jest dodatnich liczb całkowitych, których największy dzielnik właściwy (czyli dzielnik różny od 1 i od danej liczby) jest równy 91?

Ponieważ $91 = 7 \cdot 13$, więc szukane liczby mają postać $k \cdot 7 \cdot 13$, gdzie k jest liczbą pierwszą mniejszą lub równą 7. Gdyby k było liczbą złożoną, $k = a \cdot b$, to $a \cdot 91$ i $b \cdot 91$ byłyby dzielnikami właściwymi większymi od 91. Gdyby k było większe od 7, to $13k$ byłoby dzielnikiem właściwym większym od 91. Szukane liczby są cztery: $2 \cdot 91$ $3 \cdot 91, 5 \cdot 91, 7 \cdot 91.$

2. Na sprawdzianie z matematyki I zadanie rozwiązało 80% uczniów, II – 85%, III – 90%, a IV – 98%. Jaka część uczniów rozwiązała wszystkie zadania?

I zadania nie rozwiązało 20% uczniów, II – 15%, III – 10% a IV – 2%. W sumie jakiegoś zadania mogło nie rozwiązać maksymalnie 47% uczniów, a więc co najmniej 53% rozwiązało wszystkie zadania. Z drugiej strony ponieważ 20% uczniów nie rozwiązało zadania I, więc wszystkie zadania rozwiązało co najwyżej 80% uczniów. Odpowiedź brzmi: między 53% a 80%.

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których cyfrą jedności liczby $4^n + 7^n$ jest 5.

Liczba $4^n + 7^n$ jest nieparzysta, wystarczy więc, żeby była podzielna przez 5. Sprawdzamy, jakie reszty z dzielenia przez 5 dają liczby 4^n oraz 7^n (wygodnie jest tu użyć kongruencji). Dla 4^n mamy na przemian reszty: 4 i 1. Dla 7^n cyklicznie powtarzają się reszty: 2, 4, 3, 1. Reszty sumują się do 5 dla wykładników postaci $4k + 2$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in N$ ułamek $\frac{2n^2-1}{2n+1}$ jest nieskracalny.

1 sposób:

Zauważmy, że: $\frac{2n^2-1}{2n+1} = \frac{(2n+1)(n-0{,}5)-0{,}5}{2n+1}$. Rozszerzmy teraz nasz ułamek mnożąc licznik i mianownik przez 2. Ta nowa postać da się oczywiście skrócić z powrotem przez 2, ale pokażemy, że tylko przez 2, a to będzie oznaczać, że wyjściowa postać była nieskracalna.

Po rozszerzeniu przez 2 otrzymamy $\frac{(2n+1)(2n-1)-1}{2(2n+1)}$. Załóżmy, że ten ułamek da się skrócić przez liczbę $k \neq 2$. Wówczas k jest dzielnikiem liczby $2n + 1$ z mianownika, a co za tym idzie, jest również dzielnikiem liczby $(2n + 1)(2n - 1)$ z licznika. To oznacza, że musi być również dzielnikiem liczby 1 z licznika. Czyli $k = 1$, a więc wyjściowy ułamek był nieskracalny.

2 sposób:

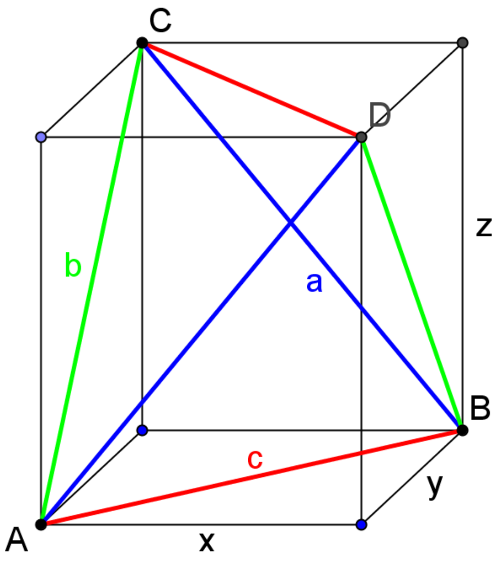
Załóżmy, że liczba d dzieli licznik i mianownik. Dzieli więc ona także ich sumę:

$$2n^2 - 1 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n = 2n(n + 1)$$

Liczba d dzieli $2n + 1$, dzieli więc też $2n(2n + 1)$. Dalej, d dzieli $2n(2n + 1) - 2n(n + 1) = 2n^2$ oraz $2n^2 - 1 - 2n^2 = 1$. Skoro d dzieli 1 więc $d = 1$, a to oznacza, że wyjściowy ułamek był nieskracalny.

2. W czworościanie $ABCD$ mamy dane krawędzie: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC. Oblicz odległość między krawędziami AB i CD.

Poprowadźmy dwie równoległe płaszczyzny, z których jedna zawiera odcinek AB, a druga CD, dwie równoległe płaszczyzny, z których jedna zawiera odcinek AC, a druga BD, oraz dwie równoległe płaszczyzny, z których jedna zawiera odcinek AD, a druga BC. W ten sposób wpisaliśmy nasz czworościan w równoległościan. Więcej, równoległoboki tworzące ściany naszego równoległościanu mają obie przekątne jednakowej długości, są więc prostokątami, a równoległościan okazuje się być prostopadłościanem.



Zadanie sprowadza się do obliczenia długości boku prostopadłościanu oznaczonego na rysunku przez z. Tu wystarcza twierdzenie Pitagorasa.

$$c^2 = x^2 + y^2$$
$$b^2 = y^2 + z^2$$
$$a^2 = x^2 + z^2$$

Z drugiego równania wyliczamy y^2, z trzeciego x^2 i podstawiamy do pierwszego otrzymując

$$c^2 = a^2 - z^2 + b^2 - y^2$$

więc

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

3. Znajdź rzut równoległy punktu $A(1, -2)$ na prostą $x - y + 3 = 0$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1, 2]$.

Wektor $[1,2]$ wyznacza kierunek reprezentowany przez proste o współczynniku kierunkowym równym 2. Wyznaczamy taką prostą przechodzącą przez punkt $(1, -2)$. Ma ona równanie $y = 2x - 4$. Znajdujemy punkt wspólny tej prostej z rzutnią czyli prostą $x - y + 3 = 0$. Ma on współrzędne (7, 10) i to jest szukany rzut punktu A na prostą $x - y + 3 = 0$.