

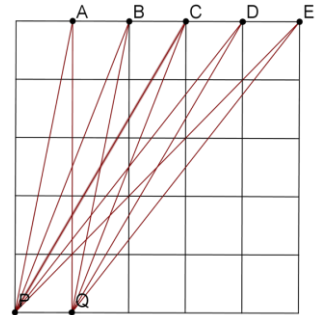


## Zestaw 6

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Kwadrat o wymiarach  $5 \times 5$  dzielimy na 25 identycznych małych kwadratów (rysunek poniżej). Ile wynosi suma kątów  $\sphericalangle PAQ$ ,  $\sphericalangle PBQ$ ,  $\sphericalangle PCQ$ ,  $\sphericalangle PDQ$ ,  $\sphericalangle PEQ$  ?



2. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

dla  $n$  całkowitych dodatnich. Ustal, czy liczba  $F_{2025}$  jest parzysta.

3. Turysta idący na stację kolejową przeszedł w ciągu godziny  $3,5$  km i zorientował się, że idąc nadal z tą samą prędkością, spóźni się na pociąg o godzinę. Przyspieszył więc i pozostałą część trasy przeszedł z prędkością  $5$  km/h, docierając na stację pół godziny przed planowanym odjazdem pociągu. Jaką długą trasę przebył ten turysta?

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że zbiór  $S = \{6n + 3 : n \in N\}$ , gdzie  $N$  jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

2. Sfera  $S_1$  jest wpisana w sześcian, sfera  $S_2$  jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera  $S_3$  jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.

2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru  $m$  równanie

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich  $m$  wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?