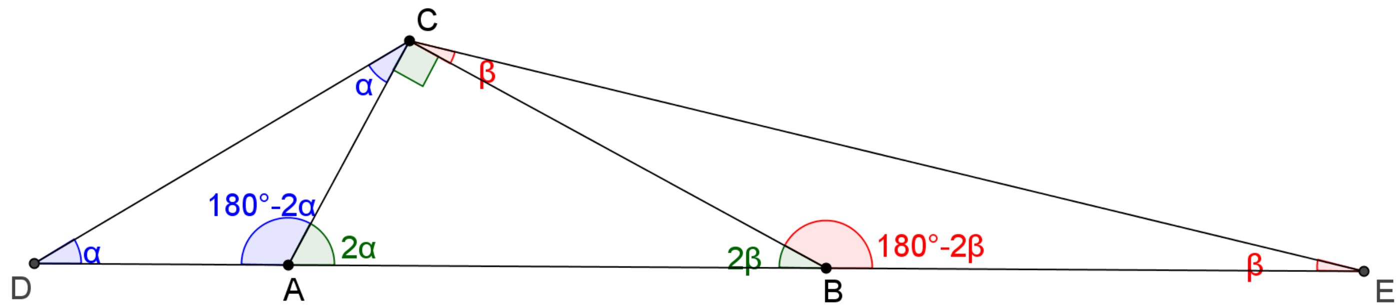
Zestaw 5

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC odłożono takie odcinki AD i BE, że $AD = AC$ i $BE = BC$. Wyznacz miarę kąta DCE.



Trójkąty ACD i BCE są równoramienne, więc kąty ADC i DCA są równe (oznaczyliśmy je przez α) oraz kąty BEC i BCE są równe (kąty β). Można obliczyć, że miara kąta CAB wynosi 2α, a miara kąta CBA – 2β (zob. rysunek). Z sumy kątów w trójkącie ABC wynika, że $2\alpha + 2\beta = 90°$, więc $\alpha + \beta = 45°$, a to oznacza, że kąt DCE ma miarę $135°$.

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

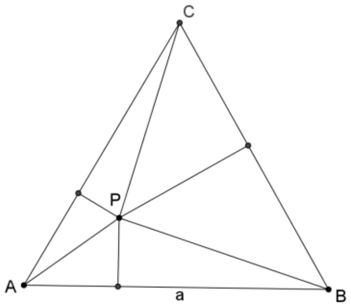
$$x \cdot y \cdot (x + 2025y) = 2025^{2024}$$

Udowodnimy, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Lewa strona nie może równać się prawej dla żadnej pary liczb całkowitych (x, y), bo prawa strona jest nieparzysta, a lewa parzysta. Jeżeli któraś z liczb x, y jest parzysta, to oczywiście cała lewa strona jest parzysta, jeżeli zaś obie liczby x, y są nieparzyste, to parzysta jest liczba $(x + 2025y)$, a co za tym idzie cała lewa strona. Korzystamy tu z faktów, że:

a) jeżeli choć jeden z czynników jest parzysty, to cały iloczyn jest parzysty

b) suma dwóch liczb nieparzystych jest parzysta.

3. Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta równobocznego ABC. Odległości punktu P od boków BC, CA, AB są równe odpowiednie x, y, z. Wykaż, że dla danego trójkąta równobocznego $x + y + z$ jest wielkością stałą.



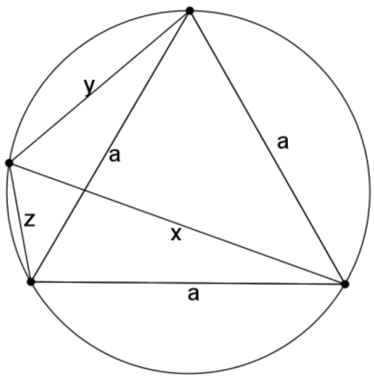
Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ABP, BCP i ACP. Wysokość trójkąta ABP jest równa odległości punktu P od boku AB, wynosi więc z. Analogicznie, wysokość trójkąta $BCP = x$, a wysokość trójkąta $ACP = y$. Mamy więc

$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot x + \frac{1}{2}a \cdot y + \frac{1}{2}a \cdot z$$
$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a(x + y + z)$$
$$(x + y + z) = h$$

Dla danego trójkąta równobocznego suma $x + y + z$ jest więc zawsze równa wysokości trójkąta.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Udowodnij, że jeden z odcinków AP, BP, CP ma długość równą sumie długości dwóch pozostałych.



Można to udowodnić na wiele sposobów. Najprościej jest wykorzystać twierdzenie Ptolemeusza:

$$ay + az = ax$$
$$y + z = x$$

2. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie oraz $ab + bc + ca = 1$, to $a + b + c \geq \sqrt{3}$

(*) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2$

Jednocześnie z nierówności Cauchy'ego

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, więc $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ czyli $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Analogicznie $b^2 + c^2 \geq 2bc$ i $a^2 + c^2 \geq 2ac$. Po dodaniu stronami i podzieleniu przez 2:

(**) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 1$

Z (*) i (**) otrzymujemy, że $(a + b + c)^2 \geq 3$, co jest równoważne tezie.

3. Rozwiąż równanie

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\sin 2x} = 1$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x + \sin 2x} = 1$$

Co jest równoważne alternatywie

(*) $x^2 + \frac{1}{2} = 1$ lub

(**) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

Rozwiązaniem (*) jest $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rozwiążmy (**)

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

$$2\cos\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2}\cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 0$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in C$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

Ostatecznie: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in C$