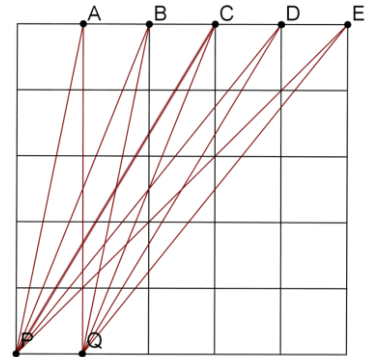




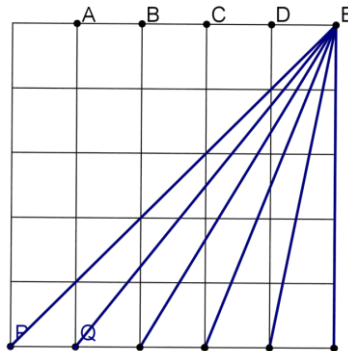
Zestaw 6

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Kwadrat o wymiarach 5×5 dzielimy na 25 identycznych małych kwadratów (rysunek obok). Ile wynosi suma kątów $\sphericalangle PAQ$, $\sphericalangle PBQ$, $\sphericalangle PCQ$, $\sphericalangle PDQ$, $\sphericalangle PEQ$?



Suma tych kątów wynosi 45° . Najłatwiej to uzasadnić przedstawiając nasze kąty jak na rysunku poniżej:



2. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

dla n całkowitych dodatnich. Ustal, czy liczba F_{2025} jest parzysta.

Liczba F_{2025} jest parzysta. Parzyste są wyrazy tego ciągu o numerach podzielnych przez 3.

Można to tak udowodnić:

Suma dwóch liczb nieparzystych jest parzysta, a suma liczby nieparzystej i parzystej jest nieparzysta. Dwa pierwsze wyrazy są nieparzyste, więc trzeci jest parzysty. Skoro więc w

ciągu Fibonacciego każdy wyraz jest sumą dwóch poprzednich, więc po wyrazie parzystym występują dwa nieparzyste, a po dwóch nieparzystych parzysty.

2. Turysta idący na stację kolejową przeszedł w ciągu godziny 3,5 km i zorientował się, że idąc nadal z tą samą prędkością, spóźni się na pociąg o godzinę. Przyspieszył więc i pozostałą część trasy przeszedł z prędkością 5 km/h, docierając na stację pół godziny przed planowanym odjazdem pociągu. Jaką długą trasę przebył ten turysta?

Niech s oznacza „pozostałą część trasy” a t czas, jaki potrzeba, żeby przejść drogę s i dotrzeć na stację w momencie odjazdu pociągu. Wówczas:

$$s = 3,5(t + 1) \quad \text{oraz} \quad s = 5(t - 0,5)$$

Z tych równań obliczymy, że $t = 4$, a $s = 17,5$. Doliczając 3,5 km, które przeszedł wcześniej obliczymy, że cała trasa liczyła 21 km.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że zbiór $S = \{6n + 3 : n \in N\}$, gdzie N jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

Liczy postaci $6(6k^2 + 6k + 1) + 3$ gdzie $k \in N$ stanowią podzbiór zbioru S i każda z nich jest kwadratem liczby naturalnej bo: $6(6k^2 + 6k + 1) + 3 = 36k^2 + 36k + 9 = (6k + 3)^2$.

2. Sfera S_1 jest wpisana w sześcian, sfera S_2 jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera S_3 jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.

Oznaczmy długość boku sześcianu przez $2a$. Wówczas sfera S_1 ma promień długości a i pole $4\pi a^2$, sfera S_2 – promień długości $a\sqrt{2}$ i pole $8\pi a^2$, sfera S_3 – promień długości $a\sqrt{3}$ i pole $12\pi a^2$. Pola te tworzą więc ciąg arytmetyczny.

3. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru m równanie

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich m wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?

Liczba 1 jest pierwiastkiem tego równania niezależnie od wartości parametru m , co łatwo sprawdzić. Z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu wynika, że pozostałe możliwe pierwiastki całkowite to: -3, -1, 3. Podstawiamy te wartości za x i wyliczamy m

x	m
-3	-4
-1	-4
3	4

Wszystkie pierwiastki równania są liczbami całkowitymi dla $m = -4$ lub $m = 4$. Przy $m = 4$, 1 jest pierwiastkiem podwójnym.