Zestaw 7

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Oblicz $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$

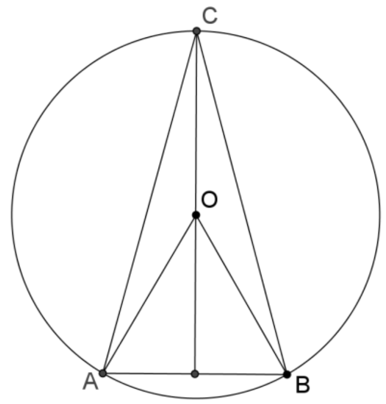
Pogrupujmy składniki po dwa i zastosujmy wzór na różnicę kwadratów:

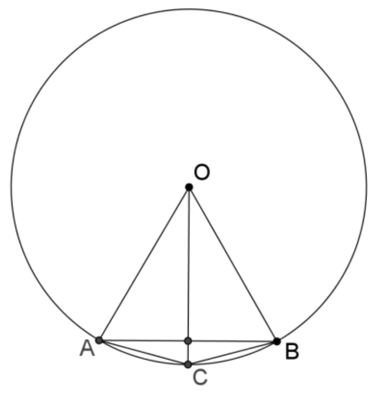
$$(100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \cdots + (2^2 - 1^2)$$
$$= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \cdots + (2 - 1)(2 + 1)$$
$$= 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 = 5050$$

2. Udowodnij, że jeżeli pewną liczbę można przedstawić jaką różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych to również jej trzykrotność można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.

$$x = a^2 - b^2$$
$$3x = 3a^2 - 3b^2$$
$$3x = 4a^2 - a^2 - 4b^2 + b^2 + 4ab - 4ab =$$
$$= (4a^2 + 4ab + b^2) - (4b^2 + 4ab + a^2) = (2a + b)^2 - (2b + a)^2$$

3. W okrąg o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego podstawa też ma długość r. Oblicz pole tego trójkąta.

a) 

b) 

Zadanie ma 2 rozwiązania:

a) wysokość trójkąta ABC jest sumą wysokości trójkąta równobocznego ABO i promienia OC i ma długość $h = \frac{r\sqrt{3}}{2} + r$ oraz pole $P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} + r\right)$

a) wysokość trójkąta ABC jest różnicą promienia OC i wysokości trójkąta równobocznego ABO i ma długość $h = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ oraz pole $P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

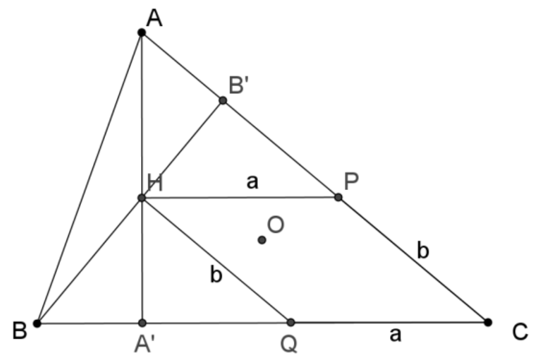
1. Rozwiąż równanie:

$$\left(5\sqrt{2} - 7\right)^{x-1} = \left(5\sqrt{2} + 7\right)^{3x}$$

Wykażemy najpierw, że liczby $5\sqrt{2} - 7$ oraz $5\sqrt{2} + 7$ są dla siebie nawzajem odwrotnościami. Jest tak, ponieważ ich iloczyn wynosi 1, co łatwo sprawdzić.
Robimy podstawienie $5\sqrt{2} - 7 = t$ i nasze równanie przybiera postać:

$$t^{x-1} = \frac{1}{t^{3x}}$$
$$t^{4x-1} = 1$$
$$4x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{4}$$

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H ortocentrum trójkąta ostrokątnego i różnobocznego ABC. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach CA i CB, przy czym czworokąt CPHQ jest równoległobokiem. Wykazać, że OP = OQ.



Zauważmy, że teza zadania będzie spełniona, jeżeli okaże się, że potęga punktu P względem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest taka sama, jak potęga punktu Q.

Oznaczmy boki równoległoboku przez a i b, a spodki wysokości przez A' i B', jak na rysunku. Trójkąty A'CA i B'CB są podobne z cechy kk, więc również podobne są trójkąty AHP i BHQ. Zachodzi proporcja $\frac{AP}{a} = \frac{BQ}{b}$, czyli $AP \cdot b = BQ \cdot a$, a o to nam chodziło.

3. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A: reszka wypadła dokładnie k razy;
B: reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
C: przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną

Moc przestrzeni Ω wynosi 2^n.
A: Aby policzyć moc zdarzenia A zauważmy, że rzecz sprowadza się do wyznaczenia k miejsc w ciągu n-wyrazowym. Można to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Tę cześć zadania można również rozwiązać wykorzystując schemat Bernoulliego – zainteresowanych zachęcam do poczytania na ten temat.

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

B: Tu musimy rozważyć dwa przypadki:
- n jest liczbą nieparzystą. Wówczas przypadków, że reszek jest więcej niż orłów jest tyle samo, co przypadków, że orłów jest więcej niż reszek i

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

- n jest liczbą parzystą. Wówczas musimy zapytać ile jest takich sytuacji, że reszek jest tyle samo, co orłów. Tu rzecz sprowadza się do wyznaczenia $\frac{n}{2}$ miejsc w ciągu n-wyrazowym. Można to zrobić na $\binom{n}{\frac{n}{2}}$sposobów. Zdarzeniu B sprzyja połowa wyników różnych od tych, gdy reszek jest tyle samo, co orłów. Ostaecznie

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}\left[2^n - \binom{n}{\frac{n}{2}}\right]}{2^n}$$

C: Rozważmy zdarzenie przeciwne: wypadały zawsze na przemian orzeł i reszka. Tu mamy tylko dwa zdarzenia sprzyjające: oror… i roro…

$$P(C) = 1 - \frac{2}{2^n}$$