



Zestaw 10

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 9, a suma długości przyprostokątnych wynosi 10.
2. Czy istnieją takie dwie dodatnie liczby całkowite, których różnica wynosi 2 i których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej?
3. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$.

KLASY TRZECIE

1. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E . Punkt F jest odbiciem symetrycznym wierzchołka C względem symetralnej boku AB . Wykaż, że punkty D , E i F są współliniowe.
2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Na półprostej CA wybrano punkty A_1, A_2 zaś na półprostej CB wybrano punkty B_1, B_2 . Na zewnątrz kąta ACB wybrano punkty C_1, C_2 w ten sposób, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoboczne. Wykaż, że punkty C, C_1, C_2 leżą na jednej prostej.
3. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych liczb całkowitych a, b, c i d , że liczby

$$a^2 + 2cd + b^2 \text{ oraz } c^2 + 2ab + d^2$$

są kwadratami.