Zestaw 8

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeżeli $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą, to również $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

Kwadrat liczby całkowitej jest liczbą całkowitą. Liczba całkowita odjąć 2 jest liczbą całkowitą

2. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c)$$

Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$ i $(a + c)(b + d) = (a + d)(b + c)$

$ac + ad + bc + bd = ab + ad + cb + cd$ $\quad$ $ab + ad + cb + cd = ab + ac + db + dc$

$ac + bd = ab + cd$ $\quad$ $ad + cb = ac + db$

$ac - ab - cd + bd = 0$ $\quad$ $ad - ac - db + cb = 0$

$a(c - b) - d(c - b) = 0$ $\quad$ $a(d - c) - b(d - c) = 0$

(1) $(a - d)(c - b) = 0$ i (2) $(a - b)(d - c) = 0$

Z (1) wynika, że $a = d$ lub $c = b$

Rozważmy dwa przypadki

a) $a = d$

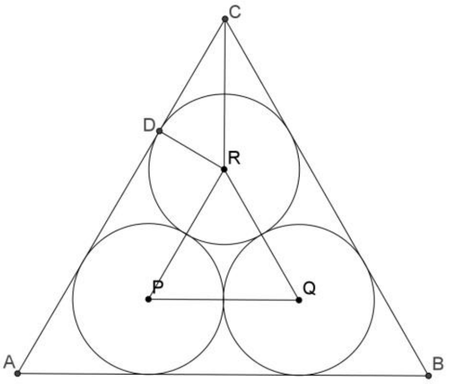
Wówczas z (2) $a = b$ (i wtedy $a = b = d$) lub $d = c$ (i wtedy $a = d = c$)

b) $c = b$

Wówczas z (2) $a = b$ (i wówczas $a = b = c$) lub $d = c$ (i wówczas $b = c = d$)

W każdej z tych sytuacji co najmniej trzy z danych liczb są równe.

3. Dane są trzy parami styczne zewnętrznie okręgi o promieniu 1. Wyznacz pole trójkąta, którego boki są odcinkami stycznych.

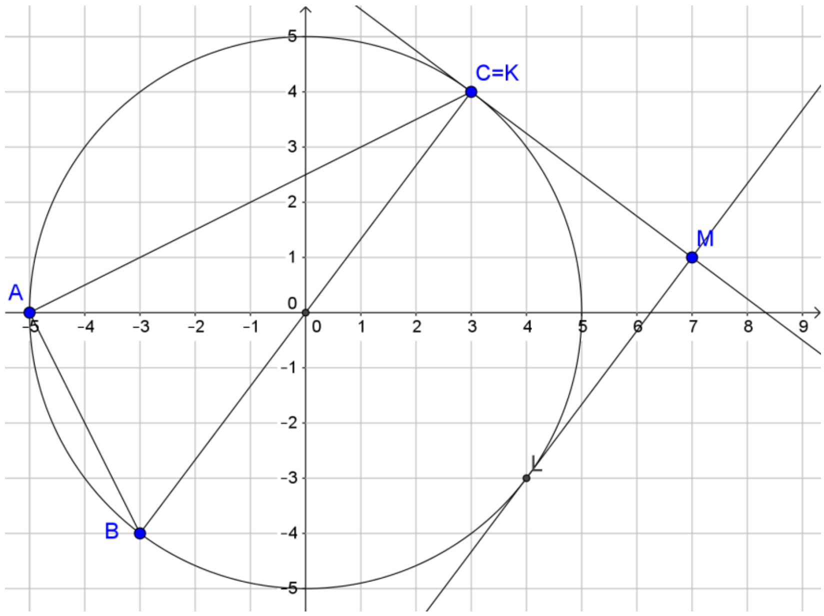


Trójkąt RDC jest trójkątem 30°, 60°, 90° (odcinek RC zawiera się w dwusiecznej kąta 60°, promień RD jest prostopadły do stycznej AC). Wynika stąd, że odcinek RC ma długość 2, a odcinek DC: $\sqrt{3}$. Teraz łatwo policzyć bok trójkąta ABC. Ma on długość $2 + 2\sqrt{3}$. Na wysokość trójkąta ABC składa się długość promienia okręgu, wysokość trójkąta PQR i długość odcinka RC, w sumie $1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3}$. Możemy liczyć pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dane są punkty $A = (-5, 0), B = (-3, -4), C = (3, 4), M = (7, 1)$. Z punktu M poprowadzono styczne k i l do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oblicz pole trójkąta KLM, gdzie K i L są punktami styczności prostych k i l z tym okręgiem.



Trójkąt ABC jest prostokątny $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{80}$, $BC = 10$. $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Okrąg na nim opisany ma środek na środku przeciwprostokątnej (punkt (0, 0)) i promień równy połowie przeciwprostokątnej r=5, ma więc równanie $x^2 + y^2 = 25$.
Styczna $y = ax + b$ przechodzi przez punkt M, a więc

$$1 = a \cdot 7 + b$$
$$b = 1 - 7a$$

Czyli styczna ma równanie $y = ax + 1 - 7a$ lub w postaci ogólnej:
$ax - y + 1 - 7a = 0$

Ponieważ styczna to prosta, której odległość od środka okręgu jest równa promieniowi dla wyznaczenia współczynnika a możemy się posłużyć wzorem na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|a \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 - 7a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$$

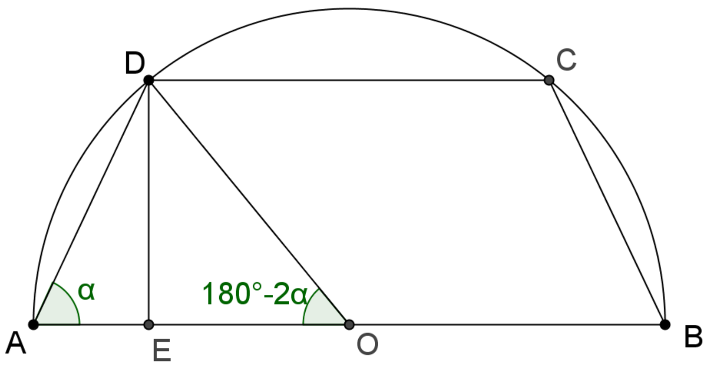
Równanie to ma dwa rozwiązania: $\frac{4}{3}$ i $-\frac{3}{4}$.

Dalej jest już prosto: wyznaczamy wyrazy wolne w stycznych, rozwiązując układy równań złożone z równania okręgu i równań prostych znajdujemy punkty K (3, 4) i L(4, -3) i liczymy pole trójkąta KLM (który okazuje się być trójkątem prostokątnym). Wynosi ono 12,5.

2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n), w którym
$a_1 = 3,\ a_2 = 33, a_3 = 333, a_4 = 3333, \ldots$

$$3 + 33 + \cdots + \underbrace{3 \ldots 33}_{n} = \frac{1}{3}\left(9 + 99 + \cdots + \underbrace{9 \ldots 99}_{n}\right) =$$
$$\frac{1}{3}(10 - 1 + 10^2 - 1 + \cdots + 10^n - 1) = \frac{1}{3}\left(10\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right) = \frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$$

3. W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, w którym ramię jest nachylone pod kątem α do podstawy będącej średnicą okręgu. Oblicz pole trapezu.



Trójkąt AOD jest równoramienny, więc kąt AOD ma miarę $180° - 2\alpha$. Odcinek EO ma długość $R \cdot cos(180° - 2\alpha)$, a wysokość ED: $R \cdot sin(180° - 2\alpha)$. Teraz można już liczyć pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot [2R + 2R \cdot cos(180° - 2\alpha)] \cdot [R \cdot sin(180° - 2\alpha)]$$