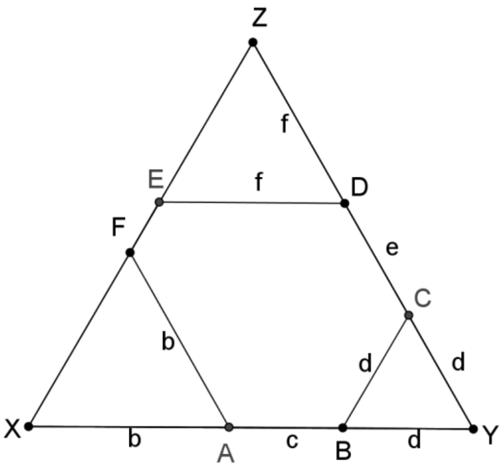
Zestaw 9

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W sześciokącie ABCDEF każdy kąt ma 120°. Udowodnij, że sumy długości odcinków wychodzących z przeciwległych wierzchołków są równe (np. AB + AF = DC + DE)

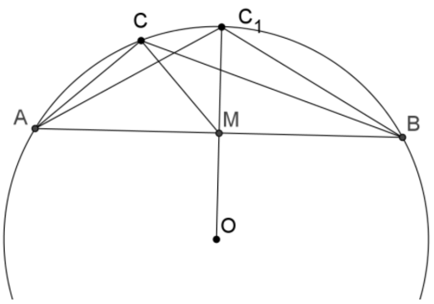
Uzupełnijmy nasz sześciokąt do trójkąta równobocznego XYZ (dlaczego trójkąt XYZ jest równoboczny?):



Wówczas trójkąty XAF, BYĆ, EDZ też są równoboczne, stąd oznaczenia jak na rysunku. Oznaczmy jeszcze długość boku trójkąta XYZ przez a. Wówczas $b + c = a - d$ oraz $f + e = a - d$.

2. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB = 120°$*. Udowodnij, że* $CM \geq \frac{\sqrt{3}}{6} AB$

Pokażemy najpierw, że odcinek CM jest najkrótszy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny. Wpiszmy nasz trójkąt w okrąg. Z nierówności trójkąta wynika, że długość łamanej OMC jest większa lub równa długości promienia okręgu. Równa jest, gdy kąt OMC ma 180°, czyli kąt AMC jest prosty, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.



Teraz pokażemy, że jeżeli trójkąt ABC jest równoramienny, to zachodzi równość $CM = \frac{\sqrt{3}}{6}AB$.

W takim wypadku trójkąt AMC jest trójkątem 30°, 60°, 90° i $CM = \frac{\sqrt{3}}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{6}AB$.

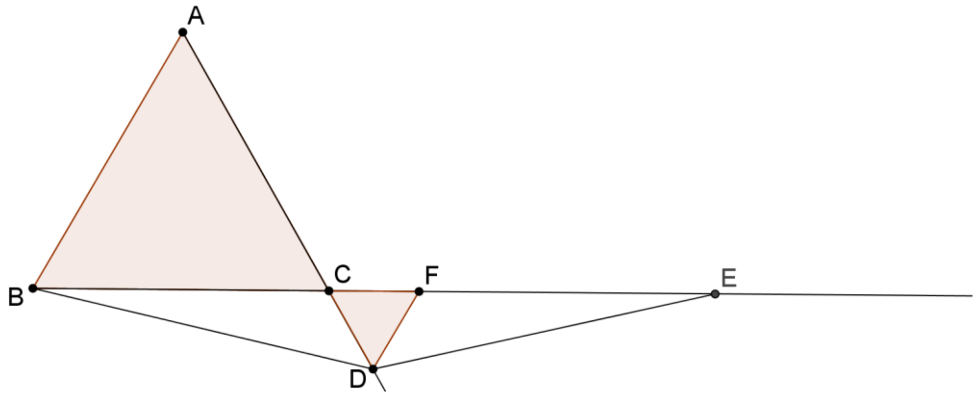
3. Udowodnij, że jeżeli liczby x, y, z spełniają równość $(x + y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$, to znajduje się wśród nich para liczb przeciwnych.

$$
\begin{aligned}
&(x + y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2 \\
&x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x^2 - y^2 + z^2 \\
&2y^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0 \\
&y^2 + xy + yz + zx = 0 \\
&y(y + x) + z(y + x) = 0 \\
&(y + x)(y + z) = 0
\end{aligned}
$$

więc $y = -x$ lub $y = -z$

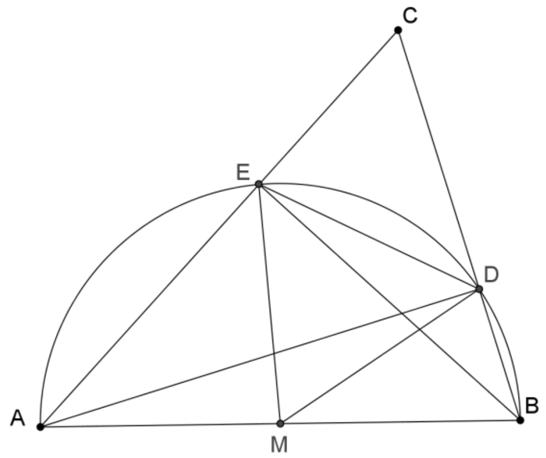
KLASY TRZECIE

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na przedłużeniu boku AC poza punkt C wybrano punkt D. Na przedłużeniu boku BC poza punkt C wybrano taki punkt E, że BD = DE. Wykazać, że AD = CE.



Obierzmy na odcinku CE taki punkt F, żeby CF=CD. Wówczas trójkąt DCF jest równoboczny. Trójkąty BDF i CDE są przystające, bo mają takie same kąty i BD=DE. To oznacza, że CE=BF=AD.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt DEM jest trójkątem równobocznym.



Na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt M (kąty AEB i ADB są obydwa proste). Odcinki ME i MD są promieniami, więc trójkąt DEM jest równoramienny. Suma kątów przy wierzchołkach A i B wynosi 120° więc korzystając z faktu, że trójkąty AME i BMD są równoramienne łatwo policzysz, że kąt EMD ma 60°.

3. Dane są liczby naturalne m, n, k, takie, że $m^2 + n^2 = k^2$. Udowodnij, że iloczyn mnk jest liczbą podzielną przez 60.

Udowodnimy kolejno podzielność mnk przez 3, 4 i 5.

Jedna z liczb m, n jest podzielna przez 3. Gdyby było inaczej liczba k^2 dawałaby resztę 2 z dzielenia przez 3, a to jest niemożliwe (korzystamy z tego, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3)

Liczby m, n nie mogą być jednocześnie nieparzyste. Gdyby tak było, liczba k^2 dawałaby resztę 2 z dzielenia przez 4, a to jest niemożliwe. Jeżeli obie liczby m, n są parzyste, to podzielność przez 4 mamy załatwioną. Załóżmy bzo, że m jest parzyste, a n nieparzyste. Wówczas $m^2 = (k-n)(k+n)$. Spośród liczb $k-n$, $k+n$ jedna jest podzielna przez 4 (sprawdź!), to oznacza, że m^2 jest podzielne przez 8, a więc przez 16, bo jest kwadratem. Czyli m jest podzielne przez 4.

Załóżmy, że żadna z liczb m, n nie dzieli się przez 5. Wówczas przystają modulo 5 do -2, -1, 1 lub 2, czyli ich kwadraty przystają modulo 5 do -1 lub 1. Nie mogą obie przystawać do -1 ani obie przystawać do 1, bo wówczas k^2 przystawałoby do -2 lub 2, a to jest niemożliwe. Czyli jedna z nich przystaje do -1, a druga do 1, a to oznacza, że liczba k jest podzielna przez 5.