



## Zestaw 10

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 9, a suma długości przyprostokątnych wynosi 10.

Oznaczmy przyprostokątne przez  $a$  i  $b$ . Wówczas  $a + b = 10$  i  $a^2 + b^2 = 81$ . Szukamy liczby  $\frac{ab}{2}$ .

$$\begin{aligned}a + b &= 10 \\a^2 + 2ab + b^2 &= 100 \\81 + 2ab &= 100 \\2ab &= 19 \\ \frac{ab}{2} &= \frac{19}{4}\end{aligned}$$

2. Czy istnieją takie dwie dodatnie liczby całkowite, których różnica wynosi 2 i których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej?

Założmy, że takie liczby istnieją i oznaczmy je przez  $a$  i  $a + 2$ . Ich iloczyn wynosi  $a^2 + 2a$ . Zauważmy, że  $a^2 < a^2 + 2a < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ . Liczba  $a^2 + 2a$  leży między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, nie może więc być kwadratem liczby całkowitej.

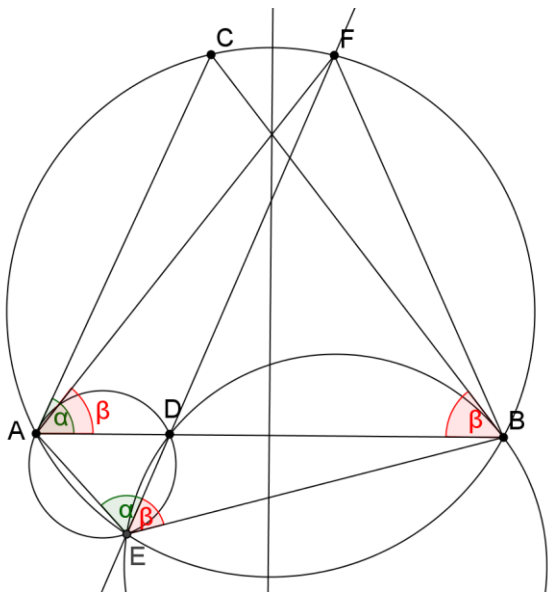
3. Dane są dodatnie liczby całkowite  $a$  i  $b$ . Wykaż, że jeżeli liczba  $a^2$  jest podzielna przez liczbę  $a + b$ , to także liczba  $b^2$  jest podzielna przez liczbę  $a + b$ .

$$b^2 = b^2 - a^2 + a^2 = (a + b)(b - a) + a^2$$

Liczba  $b^2$  jest więc sumą dwóch liczb podzielnych przez  $a + b$  czyli jest podzielna przez  $a + b$ .

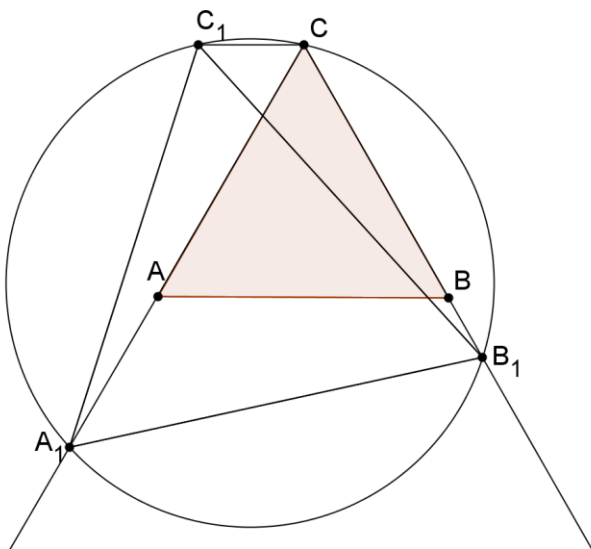
### KLASY TRZECIE

1. Punkt  $D$  leży na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Okręgi styczne do prostych  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$  przechodzą przez punkt  $D$  i przecinają się po raz drugi w punkcie  $E$ . Punkt  $F$  jest odbiciem symetrycznym wierzchołka  $C$  względem symetralnej boku  $AB$ . Wykaż, że punkty  $D$ ,  $E$  i  $F$  są współliniowe.



Oznaczmy kąt przy wierzchołku A przez  $\alpha$ , a kąt przy wierzchołku B przez  $\beta$ . Korzystając z twierdzenia o kącie dopisanym i kącie wpisanym zauważamy, że kąt AED ma miarę  $\alpha$ , a kąt DEB ma miarę  $\beta$ . To oznacza, że na czworokącie AEBF można opisać okrąg (suma kątów AEB i AFB wynosi tyle, co suma kątów w trójkącie). Trzeba jeszcze zauważyć, że kąt BEF ma miarę  $\beta$  jako oparty na tym samym łuku, co kąt BAF. Skoro kąty BED i BEF są równe, to punkty E, D, F są współliniowe (z punktu E widzimy punkty D i F pod tym samym kątem).

2. Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ . Na półprostej  $CA$  wybrano punkty  $A_1, A_2$  zaś na półprostej  $CB$  wybrano punkty  $B_1, B_2$ . Na zewnątrz kąta  $ACB$  wybrano punkty  $C_1, C_2$  w ten sposób, że trójkąty  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  są równoboczne. Wykaż, że punkty  $C, C_1, C_2$  leżą na jednej prostej.



Kąty  $A_1C_1B_1$  oraz  $A_1CB_1$  są równe, więc na czworokącie  $A_1B_1CC_1$  da się opisać okrąg. W tym okręgu równe są kąty  $A_1B_1C_1$  i  $A_1CC_1$ . Punkt  $C_1$  leży więc na prostej, która tworzy z bokiem  $AB$  kąt  $60^\circ$ . Podobnie udowodnimy, że punkt  $C_2$  leży na tej prostej.

3. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych liczb całkowitych  $a, b, c$  i  $d$ , że liczby

$$a^2 + 2cd + b^2 \text{ oraz } c^2 + 2ab + d^2$$

są kwadratami.

Wyberzmy cztery różne liczby pierwsze:  $p, q, r, s$  i niech  $a = pq, b = rs, c = pr$  i  $d = qs$ .  
Wówczas  $a^2 + 2cd + b^2 = (pq + rs)^2$ , a  $c^2 + 2ab + d^2 = (pr + qs)^2$ .

Czwórkę liczb pierwszych oczywiście wyberzemy na nieskończenie wiele sposobów.