



Zestaw 11

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

Mnożymy obustronnie przez $2xy$:

$$2x + 2y = xy$$

$$xy - 2x - 2y + 4 = 4$$

$$(x - 2)(y - 2) = 4$$

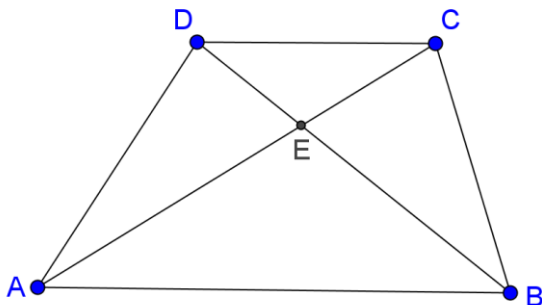
4 można rozłożyć na iloczyn liczb całkowitych jako $2 \cdot 2$, $1 \cdot 4$, $-2 \cdot (-2)$, $-1 \cdot (-4)$, stąd dostajemy rozwiązania: (x, y) : $(4, 4)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$.

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$2^x(6 - x) = 8x$$

Zauważmy najpierw, że dla $x < 0$ lewa strona jest ujemna, a prawa dodatnia, natomiast jeśli $x > 6$ lewa strona jest ujemna, a prawa dodatnia. Ręcznie sprawdzamy pozostałe przypadki i okazuje się, że równanie spełniają trzy liczby: 2, 3, 4.

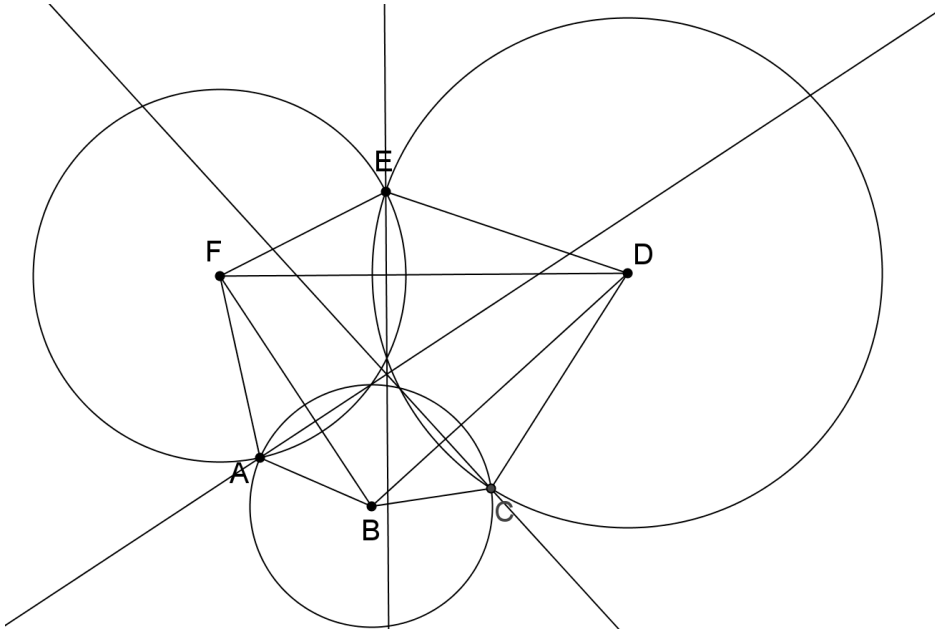
3. W czworokącie $ABCD$ punkt E jest punktem przecięcia przekątnych. Udowodnij, że jeżeli pola trójkątów AED i BEC są równe, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



Jeżeli pola trójkątów AED i BEC są równe, to również pola trójkątów ABD i ABC są równe. Ponieważ te trójkąty mają wspólną podstawę, więc z równości pól wynika, że mają również równe wysokości, czyli punkty C i D są jednakowo odległe od odcinka AB , a więc odcinki AB i CD są równoległe, czyli spełniona jest definicja trapezu.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A , przecinają się w jednym punkcie.



Dane w zadaniu równości odcinków pozwalają nam narysować widoczne na rysunku okręgi. Proste, o których mowa w zadaniu, są osiami potęgowymi tych okręgów (przechodzą przez punkty przecięcia i są prostopadłe do prostych łączących ich środki). Z twierdzenia Monge'a wynika, że przecinają się one w jednym punkcie.

2. Niech a i b będą dwiema liczbami rzeczywistymi, przy czym $a > b$. Udowodnij, że

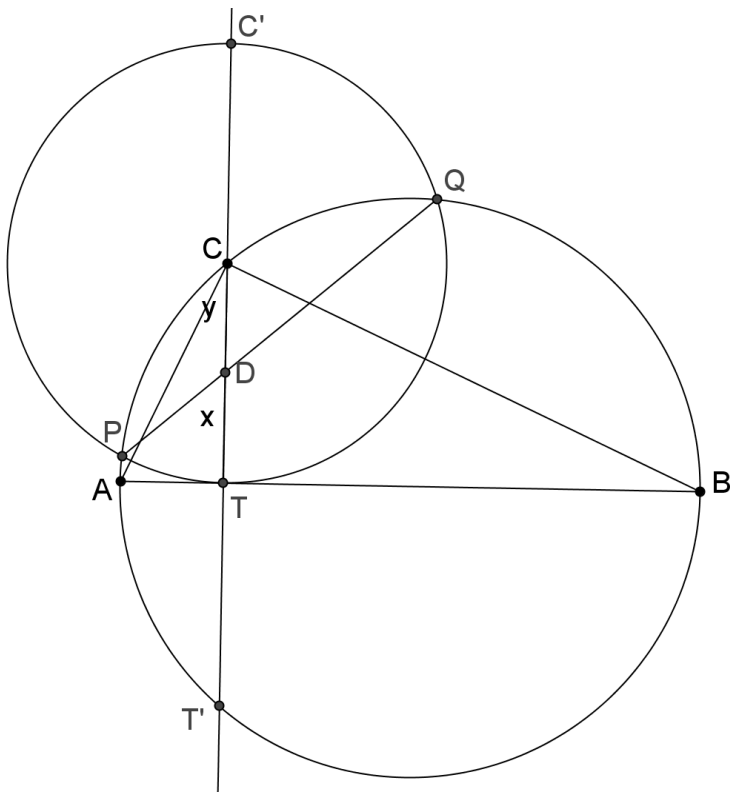
$$a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$$

Wykażemy, że $a^3 - b^3 - ab^2 + a^2b \geq 0$, co jest równoważne wyjściowej nierówności.

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - ab^2 + a^2b &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) - ab(b - a) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a - b) = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (a - b)(a + b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

bo $a > b$.

3. Odcinek CT jest wysokością trójkąta ABC , w którym kąt ACB jest prosty. Okrąg o środku C i promieniu CT oraz okrąg opisany na trójkącie ABC przecinają się w punktach P i Q . Dowieść, że prosta PQ przechodzi przez środek odcinka CT .



Oznaczmy długość odcinka DT przez x , a długość odcinka DC przez y . Łatwo sprawdzić, że wówczas zarówno odcinek CC' , jak i TT' mają długość $x + y$. Punkt D leży na osi potęgowej narysowanych okręgów, a więc jego potęgi względem tych okręgów są równe. Oznacza to równość:

$$\begin{aligned}
 x(x + 2y) &= y(2x + y) \\
 x^2 + 2xy &= 2xy + y^2 \\
 x^2 &= y^2 \\
 x &= y
 \end{aligned}$$