



Zestaw 12

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeśli liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

Okazuje się, że jedyną liczbą pierwszą p , dla której $p^2 + 2$ jest też pierwsze jest 3. Istotnie, w innym przypadku p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 3, a więc $p^2 + 2$ jest podzielne przez 3 i większe niż 3, czyli nie jest pierwsze. Dla $p = 3$ wychodzi.

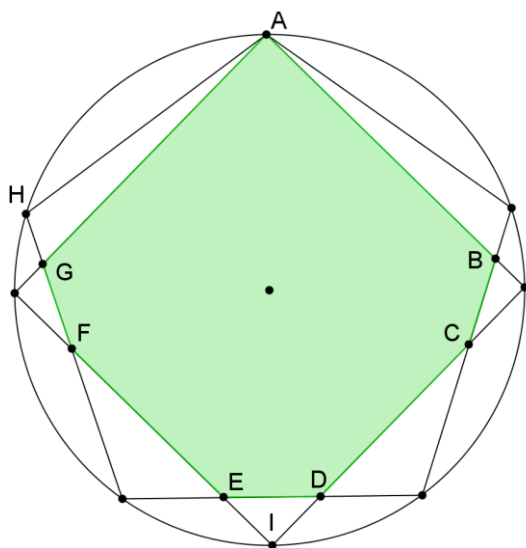
2. Liczby naturalne p i q ($p < q$) są kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Wykaż, że liczba $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

Liczby p i q są nieparzyste, więc ich suma jest parzysta, a co za tym idzie, ich średnia arytmetyczna $\frac{p+q}{2}$ jest liczbą całkowitą. Dodatkowo, p i q są kolejnymi liczbami pierwszymi, czyli ich średnia, która jest między nimi jest liczbą złożoną i można ją zapisać jako iloczyn $a \cdot b$.

$$\frac{p+q}{2} = a \cdot b$$
$$p+q = 2ab$$

czyli faktycznie $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb naturalnych większych od 1.

3. Kwadrat i pięciokąt foremny są wpisane w ten sam okrąg i mają wspólny wierzchołek. Oblicz miarę największego z kątów wewnętrznych wielokąta będącego częścią wspólną kwadratu i pięciokąta.



Częścią wspólną kwadratu i pięciokąta jest zielony siedmiokąt na rysunku. Do obliczeń wykorzystamy następujące fakty: kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę 108° , suma kątów w siedmiokącie wynosi 900° . Liczymy kąty siedmiokąta:

- kąt $GAB = 90^\circ$ - oczywiste

- kąt $AGF = \text{kąt } ABC = 117^\circ$. Policzyliśmy to z trójkąta GAH . Kąt $GAH = 9^\circ$ ($(108^\circ - 90^\circ)/2$), kąt $AHG = 108^\circ$, kąt $HGA = 63^\circ$.

- kąt $FED = \text{kąt } EDC = 135^\circ$ bo trójkąt EDI jest prostokątny równoramienny

- kąt $GFE = \text{kąt } DCB = 153^\circ$ z sumy kątów w siedmiokącie:

$$\frac{(900^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 117^\circ - 2 \cdot 135^\circ)}{2} = 153^\circ$$

Największy kąt ma więc miarę 153°

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Rozwiąż nierówność

$$3 - \log_{0,5} x - (\log_{0,5} x)^2 - (\log_{0,5} x)^3 - \dots \geq 4 \log_{0,5} x$$

Wyznaczmy dziedzinę:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ |\log_{0,5} x| &< 1 \Leftrightarrow x \in (0,5; 2) \end{aligned}$$

Podstawiamy t za $\log_{0,5} x$ i rozwiązujemy nierówność:

$$\begin{aligned} 3 - t - t^2 - t^3 - \dots &\geq 4t \\ t + t^2 + t^3 + \dots &\leq 3 - 4t \\ \frac{t}{1-t} &\leq 3 - 4t \end{aligned}$$

Możemy pomnożyć obydwie strony przez $1 - t$ bo $t < 1$. Dostajemy nierówność kwadratową, której rozwiązaniem jest $t \in (-\infty; 0,5) \cup (1,5; \infty)$, a więc

$$\begin{aligned} \log_{0,5} x &\leq 0,5 \\ x &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} \log_{0,5} x &\geq 1,5 \\ x &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu dziedziny $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.

2. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 - 16x + 64} + x \leq 7 + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

Naszą nierówność można zapisać w postaci:

$$|x - 8| + x \leq 7 + |x + 3|$$

Rozpatrując trzy przypadki dostajemy $x \in (-\infty, -4) \cup \langle -2, 18 \rangle$

3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba $p + 11$ jest dzielnikiem liczby $p(p + 1)(p + 2)$.

Rozważmy dwa przypadki:

a) $p = 11$. Wtedy warunki zadania są spełnione.

b) $p \neq 11$. Wówczas liczby p i $p + 11$ są względnie pierwsze – gdyby miały wspólny dzielnik większy od 1, to byłby on również dzielnikiem liczby 11, a to jest niemożliwe, bo $p \neq 11$ i 11 jest liczbą pierwszą. To oznacza, że $(p + 11)$ musi dzielić

$$(p + 1)(p + 2)$$

Przekształćmy wyrażenie $(p + 1)(p + 2)$ aby się dowiedzieć czegoś więcej o liczbie p .

$$(p + 1)(p + 2) = p^2 + 3p + 2 = p^2 + 11p - 8p - 88p + 90 = (p + 11)(p - 8) + 90$$

Przekształciliśmy tak, żeby dostać czynnik $(p + 11)$. Widzimy teraz, że liczba $p + 11$, aby dzielić $(p + 1)(p + 2)$ musi być dzielnikiem liczby 90. Sprawdzamy wszystkie dzielniki 90 i wychodzi nam, że $p \in \{7, 19, 79\}$.

Ostatecznie $p \in \{7, 11, 19, 79\}$.