## Zestaw 13

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

*1. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p$ większej od 3 liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.*

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Z trzech liczb $(p-1), p, (p+1)$ jedna jest podzielna przez 3, nie jest to $p$, więc jest to $(p-1)$ lub $(p+1)$. Liczba $p$ jest nieparzysta, więc $(p-1)$ i $(p+1)$ to kolejne liczby parzyste - jedna z nich dzieli się przez 2, a jedna przez 4. Mamy więc podzielność przez 3 i przez 8, czyli przez 24.

*2. Wyznacz liczbę par $(x, y)$ liczb całkowitych spełniających równanie*

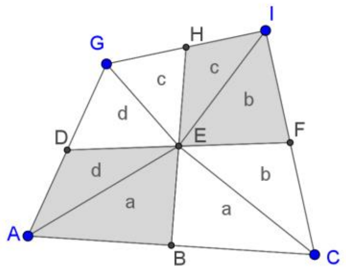
$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

Napiszmy nasze równanie tak:

$$x^4 - y^4 = 1223334444$$
$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 1223334444$$
$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 1223334444$$

Jeżeli liczby $x$ i $y$ są różnej parzystości, to mamy sprzeczność, bo lewa strona jest nieparzysta, a prawa parzysta. Jeżeli są tej samej parzystości to też mamy sprzeczność, bo lewa strona jest podzielna przez 8, a prawa nie. Takich par nie ma.

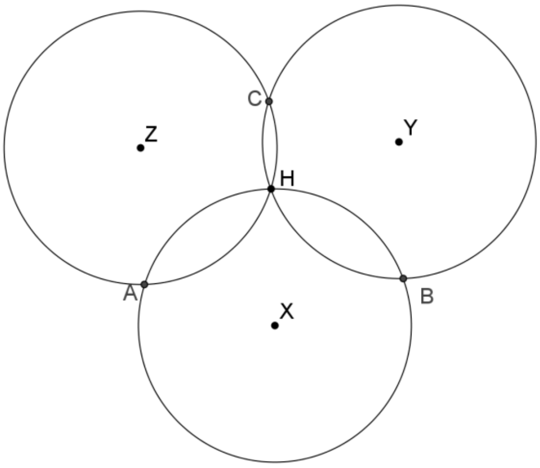
*3. Czworokąt wypukły podzielono na cztery części łącząc środki jego boków jak na rysunku. Wykaż, że suma pól części zacienionych jest równa sumie pól części niezacienionych.*




Trójkąty $ABE$ i $BCE$ mają równe podstawy i taką samą wysokość, dlatego ich pola są równe, zostały więc oznaczone ta samą literą $a$. Podobnie uzasadnimy oznaczenia literowe dla pozostałych pól trójkątów. Suma pól części zacienionych jest równa $a + b + c + d$ i suma pól części niezacienionych też jest równa $a + b + c + d$.

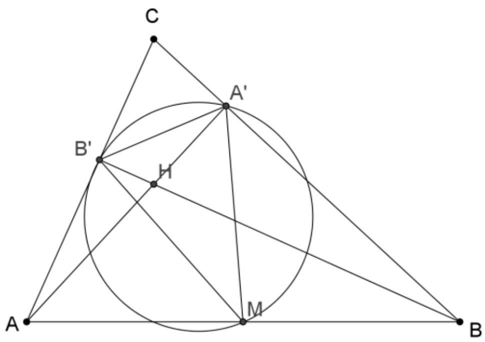
**KLASY TRZECIE I CZWARTE**

*1. Udowodnij, że jeżeli przez punkt H przechodzą trzy okręgi o jednakowych promieniach, a punkty A, B, C są różnymi od H punktami przecięć tych okręgów, to H jest ortocentrum trójkąta ABC.*



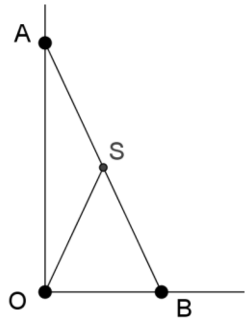

Czworokąty AXHZ, XBYH, HYCZ są rombami. CH jest prostopadłe do ZY, a co za tym idzie do AB, bo ABYZ jest równoległobokiem. Podobnie udowodnimy, że BH jest prostopadłe do AC i AH prostopadłe do BC.

*2. Na rysunku punkty A' i B' są spodkami wysokości, a punkt M jest środkiem boku AB. Udowodnij, że punkt M jest środkiem łuku A'B' okręgu dziewięciu punktów trójkąta ABC.*




Odcinek B'M jest środkową w trójkącie prostokątnym ABB', więc jego długość jest równa połowie długości boku AB. Podobnie wykażemy, że długość odcinka A'M jest równa połowie boku AB. Trójkąt A'B'M jest więc równoramienny, kąty MB'A' i B'A'M są równe czyli łuki B'M i A'M są równe.

*3. Odcinek $AB$ ślizga się po ramionach kąta prostego w ten sposób, że punkt $A$ należy do jednego ramienia, a punkt $B$ do drugiego. Jaki kształt będzie miała droga, którą przebędzie środek odcinka $AB$. Odpowiedź uzasadnij.*




Wykażemy, że droga, którą przebędzie środek odcinka $AB$ ma kształt łuku okręgu.

Rozważmy trójkąt $OBA$. Odcinek $OS$ jest w nim środkową. Środkowa w trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie przeciwprostokątnej (bo jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie). Gdy poruszamy odcinkiem $AB$ zgodnie z treścią zadania długość przeciwprostokątnej $AB$ jest stała, a więc również stała jest długość odcinka $OS$. To oznacza, że odległość punktu $S$ od punktu $O$ jest stała, a więc porusza się on po okręgu o środku w punkcie $O$.