Zestaw 13

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeżeli liczba a jest niewymierna, to liczba $\frac{10a-3}{2}$ też jest niewymierna.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\frac{10a-3}{2} = w \in \mathbf{Q}$. Wówczas $a = \frac{2w+3}{10}$ i mamy sprzeczność z założeniem, że a jest niewymierne.

2. Udowodnij, że $\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2} + \sqrt{2-2\sqrt{6}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$$
$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \left|1-\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \left|2-\sqrt{3}\right| = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3} = 1$$

3. Jaka jest najmniejsza liczba kwadratowa (czyli będąca kwadratem liczby naturalnej), w której zapisie użyjemy wszystkich z dziewięciu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, każdej używając dokładnie raz?

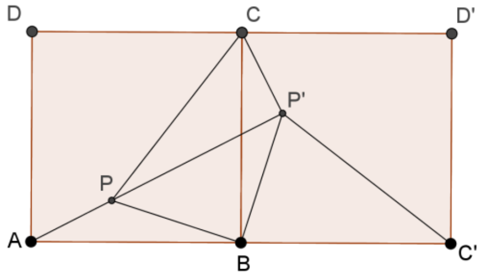
Ta liczba to 139854276, kwadrat liczby 11826.

Jak szukać takiej liczby? Ponieważ ma być możliwie mała, szukamy najpierw wśród liczb dziewięciocyfrowych zaczynających się od 1. Przebadajmy liczby między 123456789 a 198765432. Pierwiastek z pierwszej wynosi około 11111,11 a z drugiej około 14098,42. Do przebadania mamy więc kwadraty 2987 liczb. Możemy tę liczbę zmniejszyć jeśli zauważymy, że suma cyfr od 1 do 9 jest podzielna przez 9, możemy się więc ograniczyć do przebadania wielokrotności trójki.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że $AP:BP:CP = 1:2:3$. Oblicz miarę kąta APB.

Kąt APB ma miarę 135°.

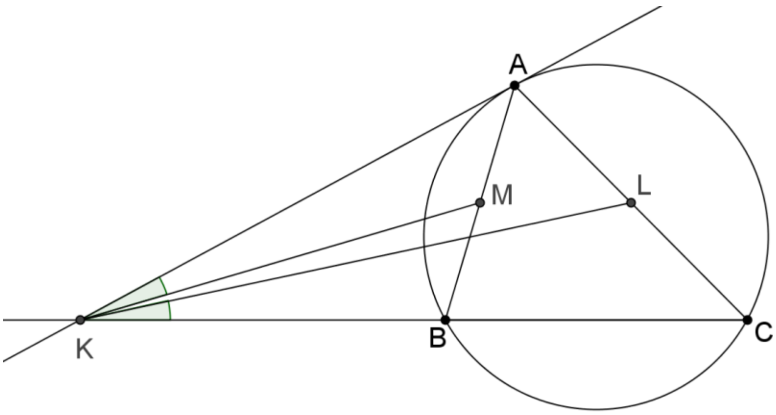


Oznaczmy odległości $AP = x, BP = 2x, CP = 3x$. Obróćmy kwadrat $ABCD$ wokół punktu B tak, żeby punkt A przeszedł na punkt C. Wówczas kąt PBP' ma 90°, kąt $BP'P = 45°$, $PP' = 2\sqrt{2}x$, i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wykazujemy, że kąt $PP'C$ jest kątem prostym. Kąt $BP'C$, a co za tym idzie kąt APB ma 135° jako suma kątów 45° i 90°.

2. Uzasadnij, że suma iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych i jedności jest kwadratem liczby naturalnej.

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

3. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina przedłużenie boku BC poza punkt B w punkcie K, L jest środkiem odcinka AC, a punkt M na odcinku AB jest taki, że ∡AKM = ∡ CKL. Udowodnij, że MA = MB.



Trójkąty KBA i KAC są podobne (jeden kąt wspólny, a kąty KAB i KCA są równe z twierdzenia o kącie dopisanym). Również trójkąty KCL i KAM są podobne (dwa kąty równe) i to w tej samej skali. Skoro L jest środkiem CA, to M jest środkiem AB.